www.etude-generale.com

Matière : Mathématique
Professeur : Yahya MATIOUI

Démonstration des propriétés de la valeur absolue

Proposition 1 *Soient x et y deux réels.*

1. $|x-y| = |y-x|$
2. $|x \times y| = |x| \times |y|$
3. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, *avec* $y \neq 0$
4. $|x^2| = |x|^2 = x^2$
5. $|x| \geq x$
6. $|x+y| \leq |x| + |y|$
7. $|x| = a$ *si et seulement si* $(x = a$ *ou* $x = -a)$, *avec* $a \geq 0$.
8. $|x| = |y|$ *si et seulement si* $(x = y$ *ou* $x = -y)$.
9. $|x| \geq a$ *si et seulement si* $x \geq a$ *ou* $x \leq -a$

Démonstration 2 (*On démontre chaque propriété*)

1. *Montrons que :* $|x-y| = |y-x|$

   1ér cas. Si : $x-y \geq 0$. *Alors* $|x-y| = x-y$. *D'autre part* $-(x-y) \leq 0$, *c'est-à-dire* $y-x \leq 0$. *Alors* $|y-x| = -(y-x) = x-y$.

   Donc, on obtient l'égalité suivante

   $$|x-y| = |y-x|$$

   2éme cas. Si : $x-y \prec 0$. *Alors* $|x-y| = -(x-y) = y-x$. *D'autre part* $-(x-y) \succ 0$, *c'est-à-dire* $y-x \succ 0$. *Alors* $|y-x| = y-x$.

   Donc, on obtient l'égalité suivante

   $$|x-y| = |y-x|$$

   Dans les deux cas, et pour tout x, y dans $\mathbb{R}$, on a :

   $$|x-y| = |y-x|$$

2. *Montrons que* : $|x \times y| = |x| \times |y|$

- Si $x \geq 0$ *et* $y \geq 0$. *Alors* $|x| = x$ *et* $|y| = y$, *donc* $|x| \times |y| = x \times y$. *D'autre part* $|x \times y| = x \times y$.

Donc, on obtient l'égalité : $|x \times y| = |x| \times |y|$

- Si $x \succ 0$ *et* $y \leq 0$. *Alors* $|x| = x$ *et* $|y| = -y$, *donc* $|x| \times |y| = -x \times y$. *D'autre part* $|x \times y| = -x \times y$.

Donc, on obtient l'égalité : $|x \times y| = |x| \times |y|$

- Si $x \prec 0$ *et* $y \prec 0$. *Alors* $|x| = -x$ *et* $|y| = -y$, *donc* $|x| \times |y| = x \times y$. *D'autre part* $|x \times y| = x \times y$. *car le produit* $x \times y$ *est positif.*

Donc, on obtient l'égalité : $|x \times y| = |x| \times |y|$

On conclut que pour tout x, y *dans* $\mathbb{R}$. *On a*

$$|x \times y| = |x| \times |y|$$

3. *Même démonstration que* 2.

4. *Montrons que* : $|x^2| = |x|^2 = x^2$

- Si : $x \geq 0$, *alors* $|x^2| = |x \times x| = |x| \times |x| = x \times x = x^2$.
- Si : $x \prec 0$, *alors* $|x^2| = |x \times x| = |x| \times |x| = (-x) \times (-x) = x^2$.

On conclut que pour tout x *dans* $\mathbb{R}$. *On a*

$$\left|x^2\right| = x^2$$

5. *Montrons que* : $x \leq |x|$

- Si : $x \geq 0$, *alors* $|x| = x$, *d'ou* $x \leq |x|$
- Si : $x \prec 0$, *alors* $|x| = -x$, *d'ou* $x \leq |x|$

On conclut que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$x \leq |x|$$

6. *Montrons que* : $|x+y| \leq |x| + |y|$

$$\begin{aligned} |x+y|^2 &= (x+y)^2 \\ &= x^2 + 2xy + y^2 \\ &= |x|^2 + 2xy + |y|^2 \\ &\leq |x|^2 + |2xy| + |y|^2 \qquad (Car \quad xy \leq |xy|) \\ &\leq (|x| + |y|)^2 \end{aligned}$$

On conclut que

$$|x+y|^2 \leq (|x|+|y|)^2$$

Donc, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, *on a*

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

7. *Montrons que* : $|x| = a$ *si et seulement si* $x = a$ *ou* $x = -a$

- Si : $x \geq 0$ *alors* $|x| = x$.

  Donc

  $$|x| = a \quad \textit{équivaux à} : x = a$$

- Si : $x \prec 0$ *alors* $|x| = -x$.

  Donc

  $$|x| = a \quad \textit{équivaux à} : x = -a$$

On conclut que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$|x| = a \textit{ si et seulement si } (x = a \textit{ ou } x = -a)$$

8. *Montrons que* : $|x| = |y|$ *si et seulement si* $(x = y$ *ou* $x = -y)$

- Si $x \geq 0$ *et* $y \geq 0$. *Alors* $|x| = x$ *et* $|y| = y$, *donc* $|x| = |y|$ *équivaux à* $x = y$.
- Si $x \succ 0$ *et* $y \leq 0$. *Alors* $|x| = x$ *et* $|y| = -y$, *donc* $|x| = |y|$ *équivaux à* $x = -y$.
- Si $x \prec 0$ *et* $y \prec 0$. *Alors* $|x| = -x$ *et* $|y| = -y$, *donc* $|x| = |y|$ *équivaux à* $x = y$.

On conclut que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$

$$|x| = |y| \text{ si et seulement si } (x = y \text{ ou } x = -y)$$

9. *Montrons que* : $|x| \geq a$

- Si : $x \geq 0$ *alors* $|x| = x \geq a$
- Si : $x \prec 0$ *alors* $|x| = -x \geq a$, *donc* $x \leq -a$

On conclut que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$|x| \geq a \text{ si et seulement si } x \geq a \text{ ou } x \leq -a$$

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude – generale.com