www.etude-generale.com
Matière : Mathématique
Professeur : Yahya MATIOUI

Correction de la série sur les suites numériques

Exercice 01

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2}{3u_n^2+1} \end{cases}$$

1. *Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n \succ 0$.*

   Initialisation : si $n = 0$, alors $u_0 \succ 0$, ceci est vraie. Donc l'inégalité pour $n = 0$ est vraie.

   Hérédité : On suppose que $u_n \succ 0$ et on montre que $u_{n+1} \succ 0$.

   On a $u_n \succ 0$, alors $u_n^2 \succ 0$. $(\mathbf{1})$

   D'autre part, comme $u_n \succ 0$ alors $3u_n^2 + 1 \succ 0$. (2)

   D'aprés (1) et (2), on obtient $\frac{u_n^2}{3u_n^2+1} \succ 0$. C'est-à-dire : $u_{n+1} \succ 0$.

   D'après le principe de récurrence on conclut que :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \succ 0$$

2. *Les variations de la suite (u_n).*

   Étudions le signe de la différence : $u_{n+1} - u_n$.

   $$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n^3}{3u_n^2+1} - u_n \\ &= \frac{u_n^3 - u_n(3u_n^2+1)}{3u_n^2+1} \\ &= \frac{u_n^3 - 3u_n^3 - u_n}{3u_n^2+1} \\ &= \frac{-2u_n^3 - u_n}{3u_n^2+1} \\ &= -\frac{2u_n^3 + u_n}{3u_n^2+1} \end{aligned}$$

   Comme $u_n \succ 0$, alors $\frac{2u_n^3+u_n}{3u_n^2+1} \succ 0$. Donc, $-\frac{2u_n^3+u_n}{3u_n^2+1} \prec 0$. Ce qui signifie que : $u_{n+1} - u_n \prec 0$. Donc, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

a) *Montrons que* : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \prec u_{n+1} \prec \frac{1}{3}u_n$

Il suffit de montrer que $0 \prec u_{n+1}$ *et* $u_{n+1} \prec \frac{1}{3}u_n$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$

On a : $u_n \succ 0$, *alors* $\frac{u_n^2}{3u_n^2+1} \succ 0$. *C'est-à-dire* $u_{n+1} \succ 0$. (**1**)

Montrons que : $u_{n+1} \prec \frac{1}{3}u_n$, *ce qui est équivaut à* $u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n \prec 0$.

$$\begin{array}{rcl} u_{n+1} - \dfrac{1}{3}u_u & = & \dfrac{u_n^3}{3u_n^2+1} - \dfrac{1}{3}u_n \\ & = & \dfrac{3u_n^3 - u_n(3u_n^2+1)}{3(3u_n^2+1)} \\ & = & \dfrac{3u_n^3 - 3u_n^3 - u_n}{3(3u_n^2+1)} \\ & = & -\dfrac{u_n}{3(3u_n^2+1)} \end{array}$$

On a : $-u_n \prec 0$ *et* $3(3u_n^2+1) \succ 0$. *Donc* : $-\frac{u_n}{3(3u_n^2+1)} \prec 0$. *Ce qui signifie que* $u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n \prec 0$. *D'ou* $u_{n+1} \prec \frac{1}{3}u_n$. (**2**)

D'après (1) *et* (2), *on conclut que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a* :

$$0 \prec u_{n+1} \prec \frac{1}{3}u_n$$

b) *On déduit que* : $\forall n \in \mathbb{N}^*;\ 0 \prec u_n \prec (\frac{1}{3})^n$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, *on a* : $0 \prec u_{n+1} \prec \frac{1}{3}u_n$

Donc

$$\left\{ \begin{array}{c} 0 \prec u_1 \prec \frac{1}{3}u_0 \\ \\ 0 \prec u_2 \prec \frac{1}{3}u_1 \\ \\ 0 \prec u_3 \prec \frac{1}{3}u_2 \\ \vdots \\ 0 \prec u_n \prec \frac{1}{3}u_{n-1} \end{array} \right.$$

en multipliant ces inégalités, on obtient

$$0 \prec u_1 \times u_2 \times ... \times u_n \prec (\underbrace{\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times ... \times \frac{1}{3}}_{n\ termes}) \times u_0 \times u_1 \times ... \times u_{n-1}$$

Ce qui signifie que

$$0 \prec u_n \prec (\frac{1}{3})^n u_0$$

et comme $u_0 = 1$ *alors, on aura*

$$0 \prec u_n \prec (\frac{1}{3})^n$$

c) *La convergence de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

* *La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est minorée par* 0. (*Question* 1)
* *La suite* $(u_n)_{\in\mathbb{N}}$ *est strictement décroissante.* (*Question* 2)

On conclut que la suite (u_n) *est convergente, calculons sa limite* : $\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n$.

On sait que

$$0 \prec u_n \prec (\frac{1}{3})^n$$

Comme $\lim_{n\longrightarrow+\infty}(\frac{1}{3})^n = 0$. *Car* $-1 \prec \frac{1}{3} \prec 1$. *Donc* $\lim_{n\longrightarrow+\infty} 0 = \lim_{n\longrightarrow+\infty}(\frac{1}{3})^n = 0$.

On en déduit que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 0$$

Exercice 02

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *telle que :*

$$\begin{cases} u_0 = 1 \text{ et } u_1 = 4 \\ u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n \end{cases}$$

1. *Calculons* u_2.

$$u_2 = \frac{3}{2}u_1 - \frac{1}{2}u_0 = \frac{3}{2} \times 4 - \frac{1}{2} \times 1 = \frac{11}{2}$$

2. *On pose pour tout* $n \in \mathbb{N}$: $v_n = u_{n+1} - u_n$

a) *Déterminons la nature de la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Calculons les rapports suivants : $\frac{v_1}{v_0}$ *et* $\frac{v_2}{v_1}$ *pour estimer la nature de la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\frac{v_1}{v_0} = \frac{u_2 - u_1}{u_1 - u_0} = \frac{\frac{11}{2} - 4}{4 - 1} = \frac{1}{2} \text{ et } \frac{v_2}{v_1} = \frac{u_3 - u_2}{\frac{11}{2} - 4} = \frac{\frac{25}{4} - \frac{11}{2}}{\frac{11}{2} - 4} = \frac{1}{2}$$

Ce qui montre bien que la suite est géométrique de raison $\frac{1}{2}$. *Car* $\frac{v_1}{v_0} = \frac{v_2}{v_1} = ... = \frac{1}{2} = q$

Montrons maintenant que la suite (v_n) *est géométrique pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+2} - u_{n+1} \\ &= \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n - u_{n+1} \\ &= (\frac{3}{2}u_{n+1} - u_{n+1}) - \frac{1}{2}u_n \\ &= \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n \\ &= \frac{1}{2}(u_{n+1} - u_n) \\ &= \frac{1}{2}v_n \end{aligned}$$

Ce qui montre que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite géométrique de raison* $\frac{1}{2}$ *et de premier terme* $v_0 = u_1 - u_0 = 4 - 1 = 3$.

b) *Calculons v_n en fonction de n.*

On a :

$$v_n = v_p q^{n-p}$$

comme $p = 0$ et $q = \frac{1}{2}$, alors : $v_n = v_0 \times (\frac{1}{2})^n$. C'est-à-dire :

$$v_n = 3 \times (\frac{1}{2})^n$$

3. *Calculons la somme $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*

Puisque la suite (v_n) est géométrique alors sa somme est :

$$\begin{aligned} S_n &= v_0 + v_1 + ... + v_{n-1} \\ &= v_0(\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}}) \\ &= 3(\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{\frac{1}{2}}) \\ &= 6(1-(\frac{1}{2})^n) \end{aligned}$$

4. *On sait que $v_n = u_{n+1} - u_n$, donc*

$$\begin{aligned} S_n &= v_0 + v_1 + ... + v_{n-1} \\ &= (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + ... + (u_n - u_{n-1}) \\ &= -u_0 + u_n \\ &= -1 + u_n \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$S_n = -1 + u_n \iff 6(1-(\frac{1}{2})^n) = -1 + u_n \iff u_n = 6(1-(\frac{1}{2})^n) + 1$$

Ce qui signifie que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_n = 6(1-(\frac{1}{2})^n) + 1$$

Par passage à la limite, on aura

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \longrightarrow +\infty} 7 - 6 \times (\frac{1}{2})^n = 7. \text{ Car } \lim_{n \longrightarrow +\infty} (\frac{1}{2})^n = 0$$

à suivre ...