Correction de la série sur les transformations dans le plan

Exercice 1 *Soit ABC un triangle et I est le milieu du segment $[BC]$.*

1. *Montrons que :* $\overrightarrow{B'C'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

   On a : $\overrightarrow{AB'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, *ceci signifie que :* $h(B) = B'$. *De même on a :* $\overrightarrow{AC'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$, *ceci signifie que :* $h(C) = C'$. *D'après la propriété caractéristique on obtient :*

   $$\overrightarrow{B'C'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$$

   Méthode N2

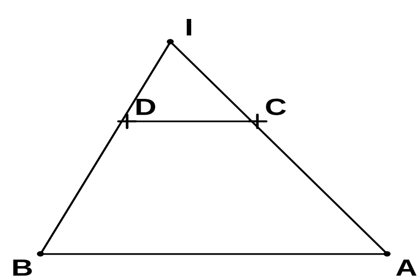
   En utilisant la relation de chasles, on a :

   $$\begin{aligned}\overrightarrow{B'C'} &= \overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{AC'} \\ &= \frac{-2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}.\end{aligned}$$

2. *L'image du point A par h est A' et l'image du point B par h est B', donc l'image du segment $[BC]$ par h est le segment $[B'C']$, et comme I est le milieu du segment $[BC]$ alors $h(I)$ est le milieu de $[B'C']$, et comme J est le milieu de $[B'C']$, donc : $h(I) = J$. Car l'homothétie conserve les milieux. Ceci signifie que les points J, A et I sont alignés.*

Exercice 2 *Soit IAB un triangle et C, D deux points tels que :* $\overrightarrow{IC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$ *et* $2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{0}$.

1. *On a :* $2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{0}$, *donc :* $\overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BI}$.



2. • *Montrons que :* $h(A) = C$

   On a : $\overrightarrow{IC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$, *ceci signifie que l'image de* A *par l'homothétie* h *est* C. *C'est-à-dire :* $h(A) = C$.

   • *Montrons que :* $h(B) = D$.

   Il suffit de montrer que : $\overrightarrow{ID} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IB}$. *On a :* $2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{0}$, *donc :* $2\left(\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DB}\right) + 3\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{0}$.

   Ensuite : $2\overrightarrow{ID} + 2\overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{0}$.

   Par ailleurs : $2\overrightarrow{ID} + 2\left(\overrightarrow{DI} + \overrightarrow{IB}\right) + 3\left(\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{ID}\right) = \overrightarrow{0}$, *donc :* $5\overrightarrow{ID} + 2\overrightarrow{DI} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{0}$.

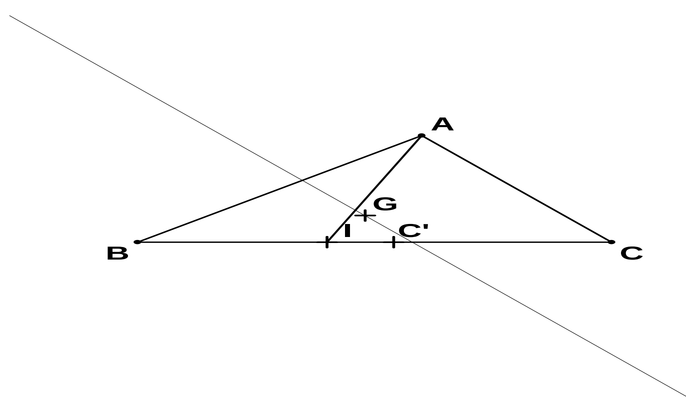
   Donc : $3\overrightarrow{ID} = \overrightarrow{IB}$. *Ceci signifie que :* $\overrightarrow{ID} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IB}$. *D'ou :* $h(B) = D$.

3. *Montrons que :* $AB = 3CD$.

   On a : $h(A) = C$ *et* $h(B) = D$. *Donc, d'après la propriété caractéristique on obtient :* $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. *Par passage à la norme on obtient :* $CD = \frac{1}{3}AB$. *Alors :* $AB = 3CD$.

Exercice 3 ABC *est un triangle et* I *est un point du segment* $[BC]$.

1.



2. *On considère l'homothétie* h *de centre* I *et de rapport* k, *tel que :* $h(A) = G$.

   a) *On a :* $h(A) = G$, *donc :* $\overrightarrow{IG} = k\overrightarrow{IA}$. *D'autre part, on a :* $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AI}$, *de plus :* $\left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IG}\right) = -\frac{3}{4}\overrightarrow{IA}$. *Par ailleurs :* $\overrightarrow{IG} = \frac{-3}{4}\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA} = \frac{1}{4}\overrightarrow{IA}$. *Ce qui signifie que* $\frac{1}{4}$ *est le rapport de l'homothétie de centre* I.

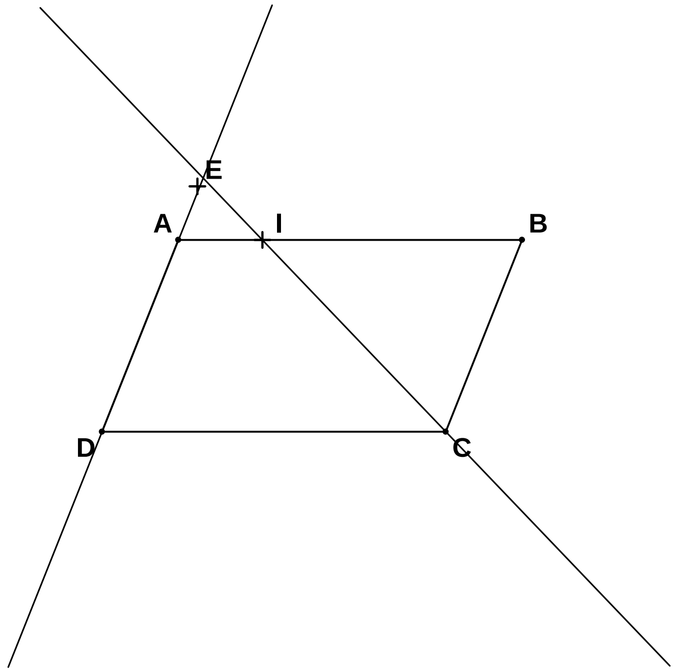
   b) *Déterminons l'image de la droite* (BC) *par* h :

   On a : $I \in (BC)$, *donc :* $h\left((BC)\right) = (BC)$.

   c) *On cherche l'image de la droite* (AC) *par* h :

   On a : $h(C) = C'$ *et* $h(A) = G$, *donc :* $h\left((AC)\right) = (GC')$. *Donc, l'image de la droite* (AC) *par l'homothétie* h *est la droite qui passe par* G *est paralléle à* (AC).

Exercice 4 *Soit $ABCD$ un parallélogramme et I est le point tel que : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.*



1. *Montrons que : $k = -3$.*

   On a : $h(A) = B$, donc : $\overrightarrow{IB} = k\overrightarrow{IA}$. D'autre part, on a : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, de plus : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}\right)$. Par ailleurs : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AI} + \frac{1}{4}\overrightarrow{IB}$, donc : $\frac{3}{4}\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{IB}$. Ce qui signifie que : $\overrightarrow{IB} = 3\overrightarrow{AI}$, donc : $\overrightarrow{IB} = -3\overrightarrow{IA}$. C'est-à-dire : $k = -3$.

2. *Soit E le point d'inetrsection des droites : (AD) et (IC).*

   a) *Montrons que : $h(E) = C$.*

   On a : $(AD) \cap (IC) = \{E\}$. Donc, il suffit de trouver l'image des droites (AD) et (IC) par l'himothétie h.

   On sait que $I \in (IC)$, donc : $h((IC)) = (IC)$.

   D'autre part, on a : $h(A) = B$, donc l'image de (AD) est la droite qui passe par le point D et parallèle à la droite (AD). Donc : $h((AD)) = (BC)$.

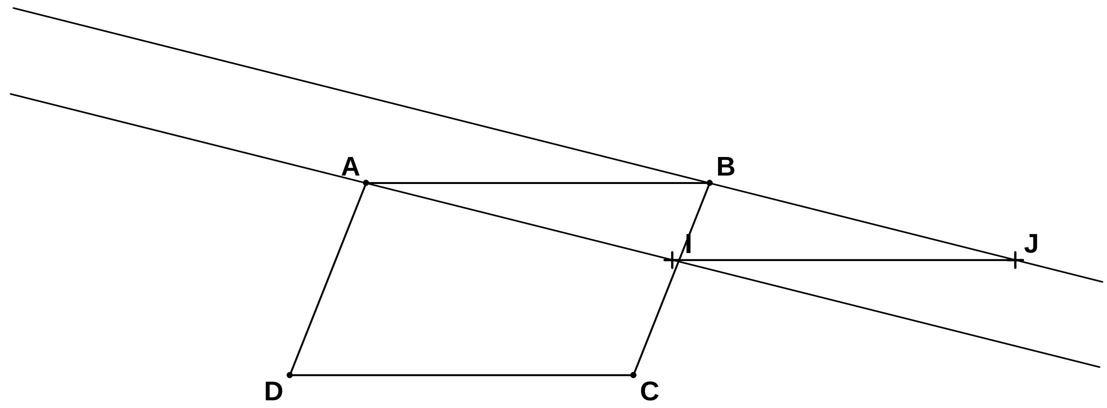
   On obtient : $(BC) \cap (IC) = \{C\}$. Ce qui signifie que : $h(E) = C$.

   b) *On déduit que : $BC = 3AE$.*

   On a : $h(A) = B$ et $h(E) = C$, donc d'après la propriété caratéristique on obtient : $\overrightarrow{BC} = -3\overrightarrow{AE}$, par passage à la norme, on a : $BC = |-3|\, AE$. C'est-à-dire : $BC = 3AE$.

3. *On a : $h(D) = D'$, $h(A) = B$ et $h(E) = C$ et les points A, E et D sont alignés et puisque l'homothétie conserve l'alignement alors les points B, C et D' sont alignés.*

Exercice 5 *1. La figure.*



2. *Montrons que :* $t_{\overrightarrow{AB}}\left((AI)\right) = (BJ)$:

   On a $ABCD$ *est un parallèlogramme donc :* $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$, *et comme :* $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{IJ}$, *donc :* $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB}$. *C'est-à-dire :* $t_{\overrightarrow{AB}}(I) = J$.

   D'autre part, on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$, *donc :* $t_{\overrightarrow{AB}}(A) = B$. *¨Par suite, on obtient :* $t_{\overrightarrow{AB}}(I) = J$ *et* $t_{\overrightarrow{AB}}(A) = B$. *Donc :* $t_{\overrightarrow{AB}}\left((AI)\right) = (BJ)$.

   On sait que l'image d'une droite par une translation est une droite qui lui est parallèle donc : (AI) *est parallèle à* (BJ).

3. *On considère l'homothétie* h *de centre* I *et transforme* B *en* C.

a) *On a :* $h(B) = C$, *donc l'image de la droite* (AB) *par l'homothétie* h *est la droite qui passe par* C *et parallèle à la droite* (AB). *Donc :* $h\left((AB)\right) = (CD)$.

b) *Montrons que :* $k = -2$.

On a : $h(B) = C$, *donc :* $\overrightarrow{IC} = k\overrightarrow{IB}$.
D'autre part, on a : $\overrightarrow{CI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$. *Donc :*

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{CI} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{CB} \iff 3\overrightarrow{CI} = 2\overrightarrow{CB} \\
&\iff 3\overrightarrow{CI} = 2\left(\overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IB}\right) \\
&\iff 3\overrightarrow{CI} = 2\overrightarrow{CI} + 2\overrightarrow{IB} \\
&\iff \overrightarrow{CI} = 2\overrightarrow{IB}
\end{aligned}$$

Donc, on obtient : $\overrightarrow{IC} = -2\overrightarrow{IB}$. *Ce qui signifie que :* $k = -2$.

4) *Soit* K *un point tel que :* $\overrightarrow{KI} = 2\overrightarrow{AB}$.

a) *Montrons que :* $h(J) = K$. *Il suffit de montrer que :* $\overrightarrow{IK} = -2\overrightarrow{IJ}$.

Donc :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{IK} &= -\overrightarrow{KI} \\
&= -2\overrightarrow{AB} \\
&= -2\underbrace{\overrightarrow{DC}}_{\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}} \\
&= -2\overrightarrow{IJ}
\end{aligned}$$

Donc, K est l'image du point J par h.

b) *Montrons que : $AI = \frac{1}{2}CK$.*

On a : $h(J) = K$ et $h(B) = C$, donc d'apère la propriété caractéristique, on obtient : $\overrightarrow{CK} = -2\overrightarrow{BJ}$.

Donc :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{CK} &= -2\left(\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IJ}\right) \\
&= -2\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{DC}\right) \\
&= -2\left(-\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{DC}\right) \\
&= -2\overrightarrow{AI}
\end{aligned}$$

D'où : $\overrightarrow{CK} = -2\overrightarrow{AI}$, et par passage à la norme on obtient : $\left\|\overrightarrow{CK}\right\| = |-2|\left\|\overrightarrow{AI}\right\|$, c'est-à-dire : $CK = 2AI$. D'où

$$AI = \frac{1}{2}CK$$

FIN

www.etude – generale.com

Pr : Yahya MATIOUI