Correction d'examen 2

Exercice 1 (4 *points*)

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :* $u_0 = \frac{3}{2}$ *et pour tout* n *de* $\mathbb{N}$ *:*

$$u_{n+1} = \frac{1}{2021}u_n + \frac{2020}{2021}$$

1. **a)** *Montrons par récurrence que :* $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n \geq 1$.

Initialisation : Si $n = 0$*, alors* $u_0 = \frac{3}{2}$ *et comme* $u_0 \geq 1$*. Donc, l'inégalité est vraie.*

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$*. On suppose que* $u_n \geq 1$*, et on montre que :* $u_{n+1} \geq 1$.

évaluons le signe de la différence : $u_{n+1} - 1$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 1 &= \frac{1}{2021}u_n + \frac{2020}{2021} - 1 \\ &= \frac{1}{2021}u_n - \frac{1}{2021} \end{aligned}$$

et comme $u_n \geq 1$*, donc :* $\frac{1}{2021}u_n - \frac{1}{2021} \geq 0$*. D'où :* $u_{n+1} \geq 1$.

Donc, d'après le principe de récurrence on déduit que pour tout n *de* $\mathbb{N}$*, On a :* $u_n \geq 1$.

b)

- *Soit* $n \in \mathbb{N}$.

Vérifions que : $u_{n+1} - u_n = \frac{2020}{2021}(1 - u_n)$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{2021}u_n + \frac{2020}{2021} - u_n \\ &= \frac{1}{2021}u_n - u_n + \frac{2020}{2021} \\ &= \frac{-2020}{2021}u_n + \frac{2020}{2021} \\ &= \frac{2020}{2021}(1 - u_n) \end{aligned}$$

- *Montrons que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante.*

On a : $u_{n+1} - u_n = \frac{2020}{2021}(1 - u_n)$*, et comme* $u_n \geq 1$ *alors :* $1 - u_n \leq 0$*. Donc :* $u_{n+1} - u_n \leq 0$*. Ceci signifie que la suite* $(u)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante.*

c) *La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante, donc :* $u_n \leq u_{n-1} \leq u_{n-2} \leq ... \leq u_0$*. On déduit la majoration suivante :* $u_n \leq u_0$*, et comme* $u_0 = \frac{3}{2}$*, on obtient :*

$$(\forall n \in \mathbb{N}), u_n \leq \frac{3}{2}$$

2. *Soit* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite numérique telle que :* $v_n = u_n - 1$.

   a) *Montrons que la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite géométrique de raison* $q = \frac{1}{2021}$
   Soit $n \in \mathbb{N}$. *On a :*

$$\begin{array}{rcl} v_{n+1} & = & u_{n+1} - 1 \\ & = & \dfrac{1}{2021}u_n - \dfrac{1}{2021} \\ & = & \dfrac{1}{2021}\left(u_n - 1\right) \\ & = & \dfrac{1}{2021}v_n \end{array}$$

   Ceci signifie que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est géométrique de raison* $q = \frac{1}{2021}$ *et de premier terme* $v_0 = u_0 - 1 = \frac{1}{2}$.

   b) *Soit* $n \in \mathbb{N}$.

   - *On exprime* v_n *en fonction de* n.
     La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est géométrique de raison* $q = \frac{1}{2021}$. *Donc :* $v_n = v_p \times q^{n-p}$. *Comme* $p = 0$, *alors on obtient :*

$$v_n = \frac{1}{2\times 2021^n}$$

   - *On exprime* u_n *en fonction de* n.
     On a : $v_n = \frac{1}{2\times 2021^n}$, *et comme :* $v_n = u_n - 1$ *alors :* $u_n - 1 = \frac{1}{2\times 2021^n}$. *Donc :*

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \quad u_n = 1 + \frac{1}{2\times 2021^n}$$

3. *Montrons que :* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\ln(u_n)}{u_n - 1} = 1$

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\ln\left(u_n\right)}{u_n - 1} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{2\times 2021^n}\right)}{\frac{1}{2\times 2021^n}}$$

   On sait que : $-1 \prec \frac{1}{2021} \prec 1$. *Donc :* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{2021^n} = 0$. *Alors on pose* $N = \frac{1}{2\times 2021^n}$ *quand* n *tend vers* $+\infty$, *on a* N *tend vers* 0. *Donc on obtient :* $\lim\limits_{N\longrightarrow 0} \frac{\ln(1+N)}{N} = 1$. (*limite usuelle*) *On a donc :*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\ln\left(u_n\right)}{u_n - 1} = 1$$

Exercice 2 (*Les nombres complexes*)

1. *Dans l'ensemble* $\mathbb{C}$ *des nombres complexes, on considère l'équation :*

$$(E) : z^2 - 2(\sqrt{2} + \sqrt{6})z + 16 = 0$$

a) *Vérifions que le discriminant de l'équation* (E) *est :* $\Delta = -4(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2$

$$\begin{aligned}\Delta &= \left[-2(\sqrt{2}+\sqrt{6})\right]^2 - 64\\ &= 4(2+2\sqrt{12}+6) - 64\\ &= 32+8\sqrt{12}-64\\ &= -32+8\sqrt{12}\\ &= -4(\sqrt{6}-2\sqrt{12}+\sqrt{2})\\ &= -4(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2\end{aligned}$$

b) *L'équation* (E) *admet deux solutions complexes conjuguées* z_1 *et* z_2 *telles que :*

$$z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} = (\sqrt{2}+\sqrt{6}) + i(\sqrt{6}-\sqrt{2})$$

et : $z_2 = \overline{z_1} = \overline{(\sqrt{2}+\sqrt{6}) + i(\sqrt{6}-\sqrt{2})} = (\sqrt{2}+\sqrt{6}) - i(\sqrt{6}-\sqrt{2})$. *Donc*

$$S = \left\{(\sqrt{2}+\sqrt{6}) + i(\sqrt{6}-\sqrt{2}), (\sqrt{2}+\sqrt{6}) - i(\sqrt{6}-\sqrt{2})\right\}$$

2. **a)** *Vérifions que :* $b\overline{c} = a$

$$\begin{aligned}b\overline{c} &= (1+i\sqrt{3})(\sqrt{2}-i\sqrt{2})\\ &= \sqrt{2}-i\sqrt{2}+i\sqrt{6}+\sqrt{6}\\ &= (\sqrt{2}+\sqrt{6})+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})\end{aligned}$$

donc comme $b\overline{c} = a$ *alors* $b\overline{c}.c = ac$, *et comme* $c\overline{c} = (\sqrt{2}-i\sqrt{2})(\sqrt{2}+i\sqrt{2}) = 4$.
Alors on obtient :

$$ac = 4b$$

b) *L'écriture trogonométrique des nombres complexes :* b *et* c.

$$\begin{aligned}b &= 1+i\sqrt{3}\\ &= 2(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})\\ &= 2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}).\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}c &= \sqrt{2}+i\sqrt{2}\\ &= 2(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})\\ &= 2(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}).\end{aligned}$$

c) *On déduit que :* $a = 4(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})$.

cherchons le module de a *:*

$$|a| = |b\overline{c}| = |b|\,|\overline{c}| = 2 \times 2 = 4$$

l'argument du complexe a *:*

$$\begin{aligned} \arg(a) &\equiv \arg(b\overline{c})\,[2\pi] \\ &\equiv \arg(\overline{c}) + \arg(b)\,[2\pi] \end{aligned}$$

et comme $\arg(\overline{c}) \equiv -\arg(c)\,[2\pi]$ *, alors* $\arg(\overline{c}) \equiv -\frac{\pi}{4}\,[2\pi]$ *. Donc :*

$$\begin{aligned} \arg(a) &\equiv -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\,[2\pi] \\ &\equiv \frac{\pi}{12}\,[2\pi] \end{aligned}$$

On aura

$$a = 4(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})$$

3. *Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct* $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$*; on considèreles points* B, C *et* D *d'affixes respectives* b*,* c *et* d *telle que* $d = a^4$*: Soient* z *l'affixe d'un point* M *du plan et* $z^{'}$ *l'affixe de* M' *image de* M *par le rotation* R *de centre* O *et d'angle* $\frac{\pi}{12}$.

a) *vérifions que :* $z' = \frac{1}{4}az$

$$\begin{aligned} R(M) &= M' \iff z' - z_o = e^{i\frac{\pi}{12}}(z - z_o) \\ &\iff z' = \frac{a}{4}z \end{aligned}$$

car $e^{i\frac{\pi}{12}} = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12} = \frac{a}{4}$.

b) *L'image du point* C *par la rotation* R.

Notons C' *l'image du point* C *par la rotation* R *de centre* O *et d'angle* $\frac{\pi}{12}$.

$$R(C) = C' \iff c' = \frac{a}{4}c = \frac{ac}{4} = b$$

donc : $C' = B$*. C'est-à-dire l'image du point* C *par la rotation* R *de centre* O *et d'angle* $\frac{\pi}{12}$ *est le point* B.

c) *La nature du triangle* OBC.

On a

$$R(C) = B \iff \left\{ \begin{array}{c} OB = OC \\ \left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}\right) \equiv \frac{\pi}{12}\,[2\pi] \end{array} \right.$$

Donc, le triangle OBC *est isocéle.*

d) *Montrons que :* $a^4 = 128b$

On a : $a = 4(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})$*, et d'après la formule de Moivre, on obtient :*

$$\begin{aligned} a^4 &= 4^4.\left(\cos\left(4\times\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(4\times\frac{\pi}{12}\right)\right) \\ &= 256\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \\ &= \frac{256}{2}(1+i\sqrt{3}) \\ &= 128b \end{aligned}$$

Déduction :

on a :

$$\frac{d-z_o}{b-z_o} = \frac{d}{b} = \frac{a^4}{b} = \frac{128b}{b} = 128 \in \mathbb{R}$$

Donc, les points O, B *et* D *sont alignés.*

Exercice 3 (*Les intégrales*)

Soit $\theta \in \mathbb{R}$*, on pose :* $A(\theta) = \cos^2(\theta)\sin^4(\theta)$.

1. *Montrons que :* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} A(\theta)\, d\theta = \frac{\pi}{32}$

   On utilise les formules d'euler pour linéariser l'expression $A(\theta)$*, telles que :* $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ *et* $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$.

   Donc :

$$\begin{aligned} A(\theta) &= \cos^2(\theta)\sin^4(\theta) \\ &= \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^4 \\ &= \frac{\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)^2\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)^2\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)^2}{16\times 4} \\ &= \frac{\left[\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)\right]^2\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)^2}{64} \\ &= \frac{\left(e^{2i\theta}-e^{-2i\theta}\right)^2\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)^2}{64} \\ &= \frac{\left(e^{4i\theta}-2+e^{-4i\theta}\right)\left(e^{2i\theta}-2+e^{-2i\theta}\right)}{64} \\ &= \frac{e^{6i\theta}-2e^{4i\theta}+e^{2i\theta}-2e^{2i\theta}+4-2e^{-2i\theta}+e^{-2i\theta}-2e^{-4i\theta}+e^{-6i\theta}}{64} \\ &= \frac{\left(e^{6i\theta}+e^{-6i\theta}\right)-2\left(e^{4i\theta}+e^{-4i\theta}\right)+\left(e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}\right)-2\left(e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}\right)+4}{64} \\ &= \frac{2\cos(6\theta)-4\cos(4\theta)+2\cos(2\theta)-4\cos(2\theta)+4}{64} \\ &= \frac{2\cos(6\theta)-4\cos(4\theta)-2\cos(2\theta)+4}{64} \\ &= \frac{\cos(6\theta)}{32}-\frac{\cos(4\theta)}{16}-\frac{\cos(2\theta)}{32}+\frac{1}{16} \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} A(\theta)\, d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(6\theta)}{32} - \frac{\cos(4\theta)}{16} - \frac{\cos(2\theta)}{32} + \frac{1}{16} d\theta \\
&= \frac{1}{32}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(6\theta)\, d\theta - \frac{1}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(4\theta)\, d\theta - \frac{1}{32}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2\theta)\, d\theta + \frac{1}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\
&= \frac{1}{32}\left[\frac{\sin(6\theta)}{6}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{16}\left[\frac{\sin(4\theta)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{32}\left[\frac{\sin(2\theta)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{16}[\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{32}(0-0) - \frac{1}{16}(0-0) - \frac{1}{32}(0-0) + \frac{1}{16} \times \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{\pi}{32}
\end{aligned}$$

On obtient finalement

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} A(\theta)\, d\theta = \frac{\pi}{32}$$

2. • *En utilisant une intégration par parties, calculons l'intégrale suivante :* $\int_0^1 (1+2x)\, e^{2x} dx$

$$\left\{\begin{array}{l} u(x) = 1+2x \\ \\ v'(x) = e^{2x} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} u'(x) = 2 \\ \\ v(x) = \frac{e^{2x}}{2} \end{array}\right.$$

donc

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (1+2x)\, e^{2x} dx &= \left[\frac{(1+2x)\, e^{2x}}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 e^{2x} dx \\
&= \frac{3}{2}e^2 - \frac{1}{2} - \left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 \\
&= \frac{3}{2}e^2 - \frac{1}{2} - \left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\right) \\
&= e^2
\end{aligned}$$

On obtient finalement

$$\int_0^1 (1+2x)\, e^{2x} dx = e^2$$

• *En utilisant une intégration par parties, calculons l'intégrale* $\int_0^{e-1} \ln(1+x)\, dx$ *:*

$$\left\{\begin{array}{l} u(x) = \ln(1+x) \\ \\ v'(x) = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} u'(x) = \frac{1}{1+x} \\ \\ v(x) = x \end{array}\right.$$

donc

$$\begin{aligned}
\int_0^{e-1} \ln(1+x)\,dx &= [x.\ln(1+x)]_0^{e-1} - \int_0^{e-1} \frac{x}{1+x}dx \\
&= (e-1) - \int_0^{e-1} \frac{x+1-1}{1+x}dx \\
&= (e-1) - \int_0^{e-1} 1 - \frac{1}{x+1}dx \\
&= (e-1) - [x - \ln(x+1)]_0^{e-1} \\
&= (e-1) - (e-1-1) \\
&= 1
\end{aligned}$$

On obtient finalement

$$\int_0^{e-1} \ln(1+x)\,dx = 1$$

Problème d'analyse 4 (*L'étude de la fonction exponentielle*)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4)$$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. (unité : 2cm).

1. **a)** • *Calculons :* $\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = +\infty$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \longrightarrow -\infty} -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4) = +\infty \\
car &: \lim_{x \longrightarrow -\infty} e^{x-2} = 0 \ \ et \ \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4) = 0 \ \ et \ \lim_{x \longrightarrow -\infty} -x + \frac{5}{2} = +\infty
\end{aligned}$$

• *Calculons :* $\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = -\infty$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \longrightarrow +\infty} -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4) = -\infty \\
car &: \lim_{x \longrightarrow +\infty} e^{x-2} = +\infty \ \ et \ \lim_{x \longrightarrow +\infty} -\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4) = -\infty \\
et \ \lim_{x \longrightarrow +\infty} -x + \frac{5}{2} &= -\infty
\end{aligned}$$

b) *Pour montrer que la droite (Δ) d'équation $y = -x + \frac{5}{2}$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$, il suffit de montrer que :* $\lim_{x \longrightarrow -} f(x) - (-x + \frac{5}{2}) = 0$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) - (-x + \frac{5}{2}) &= \lim_{x \longrightarrow -\infty} -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4) + x - \frac{5}{2} \\
&= \lim_{x \longrightarrow -\infty} -\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4) = 0
\end{aligned}$$

Donc, la droite (Δ) d'équation $y = -x + \frac{5}{2}$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.

- *Résolvons l'équation dans l'ensemble* $\mathbb{R}$: $e^{x-2} - 4 = 0$

$$e^{x-2} - 4 = 0 \iff e^{x-2} = 4 \iff x - 2 = \ln 4 \iff x = 2 + \ln 4$$

Donc

$$S = \{2 + \ln 4\}$$

évaluons le signe de la différence $f(x) - (-x + \frac{5}{2})$:

$$f(x) - (-x + \frac{5}{2}) = -\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4)$$

comme $\frac{-1}{2}e^{x-2} \prec 0$ *pour tout* x *dans* $\mathbb{R}$, *alors on étudie le signe de l'expression* $e^{x-2} - 4$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

*

$$e^{x-2} - 4 \geq 0 \iff x - 2 \geq \ln 4 \iff x \geq 2 + \ln 4 \iff x \in [2 + \ln 4, +\infty[$$

et

$$e^{x-2} - 4 \leq 0 \iff x - 2 \leq \ln 4 \iff x \leq 2 + \ln 4 \iff x \in]-\infty, 2 + \ln 4]$$

On obtient

$$\begin{aligned} f(x) - (-x + \frac{5}{2}) &\leq 0 \iff x \in [2 + \ln 4, +\infty[\\ f(x) - (-x + \frac{5}{2}) &\geq 0 \iff x \in]-\infty, 2 + \ln 4] \end{aligned}$$

Ceci signifie que :

- *Si* $x \in]2 + \ln 4, +\infty[$ *alors* : $f(x) - (-x + \frac{5}{2}) \prec 0$. *Ceci signifie que* (C) *est au dessous de la droite* (Δ) *sur l'intervalle* $]2 + \ln 4, +\infty[$.
- *Si* $x \in]-\infty, 2 + \ln 4[$ *alors* : $f(x) - (-x + \frac{5}{2}) \succ 0$. *Ceci signifie que* (C) *est au dessus de la droite* (Δ) *sur l'intervalle* $]-\infty, 2 + \ln 4[$.
- (C_f) *et* (Δ) *se coupent en point d'abscisse* $2 + \ln 4$.

2. **a)** *Montrons que* : $\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{-x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4)}{x} \\ &= \lim_{x \longrightarrow +\infty} -1 + \frac{5}{2x} - \frac{e^{x-2}(e^{x-2} - 4)}{2x} \\ &= \lim_{x \longrightarrow +\infty} -1 + \frac{5}{2x} - \frac{e^{x-2}}{x-2} \times \frac{x-2}{2x} \times (e^{x-2} - 4) = -\infty \end{aligned}$$

car : $\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{e^{x-2}}{x-2} = +\infty$ et $\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x-2}{2x} = \frac{1}{2}$ et $\lim_{x \longrightarrow +\infty} (e^{x-2} - 4) = +\infty$ *et* $\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{5}{2x} = 0$.

Interprétation géométrique.

La courbe (C) *admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de* $+\infty$.

b) *Calculons la fonction dérivée f' sur $\mathbb{R}$.*

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme la somme et le produit des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. ($x \longmapsto -x + \frac{5}{2}$, $x \longmapsto \frac{-1}{2}e^{x-2}$ et $x \longmapsto e^{x-2} - 4$).

calculons $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (-x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4))' \\
&= -1 - \left(\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4) + \frac{1}{2}e^{x-2} \times e^{x-2}\right) \\
&= -1 - \left(\frac{1}{2}e^{2x-4} - 2e^{x-2} + \frac{1}{2}e^{2x-4}\right) \\
&= -1 - e^{2x-4} + 2e^{x-2} \\
&= -((e^{x-2})^2 - 2e^{x-2} + 1) \\
&= -(e^{x-2} - 1)^2
\end{aligned}$$

c) *Le tableau de variations de la fonction f.*

comme $(e^{x-2} - 1)^2 \geq 0$, alors : $-(e^{x-2} - 1)^2 \leq 0$. Donc : $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = 0 \iff -(e^{x-2} - 1)^2 = 0 \iff x - 2 = 0 \iff x = 2.$$

On déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$-$
f	$+\infty$	2	$-\infty$

3. *La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculons $f''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*

$$f''(x) = -2e^{x-2}(e^{x-2} - 1)$$

comme $-2e^{x-2} \prec 0$, pour tout x dans $\mathbb{R}$, alors on étudie le signe de l'expression $e^{x-2} - 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Donc

$$\begin{aligned}
e^{x-2} - 1 &\geq 0 \iff e^{x-2} \geq 1 \\
&\iff x - 2 \geq 0 \\
&\iff x \geq 2 \\
&\iff x \in [2, +\infty[
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} e^{x-2}-1 \leq 0 &\iff e^{x-2} \leq 1 \\ &\iff x-2 \leq 0 \\ &\iff x \leq 2 \\ &\iff x \in]-\infty, 2] \end{aligned}$$

On résume le signe de la fonction f'' dans le tableau suivant :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$-2e^{(x-2)}$	$-$		$-$
$e^{(x-2)}-1$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$		$-$
convexite−de(C)	(C)*convexe*		(C)*concave*

Puisque la fonction f'' s'annule en 2 avec un changement de signe, alors le point $A(2,2)$ est un point d'inflexion de la courbe (C).

4. *Montrons que l'équation $f(x)=0$ admet unique solution α telle que :* $\alpha \in]2+\ln 3, 2+\ln 4[$

   On a :

   - *La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ (car elle est dérivable sur $\mathbb{R}$), en particulier elle est continue sur* $]2+\ln 3, 2+\ln 4[$.
   - *La fonction f est strictement décroissante sur* $]2+\ln 3, 2+\ln 4[$.
   - $f(2+\ln 3) \times f(2+\ln 4) \prec 0$.

   On conclut d'aprés le T.V.I que l'équation $f(x)=0$ admet unique solution α dans l'intervalle $]2+\ln 3, 2+\ln 4[$.

   Autrement dit :

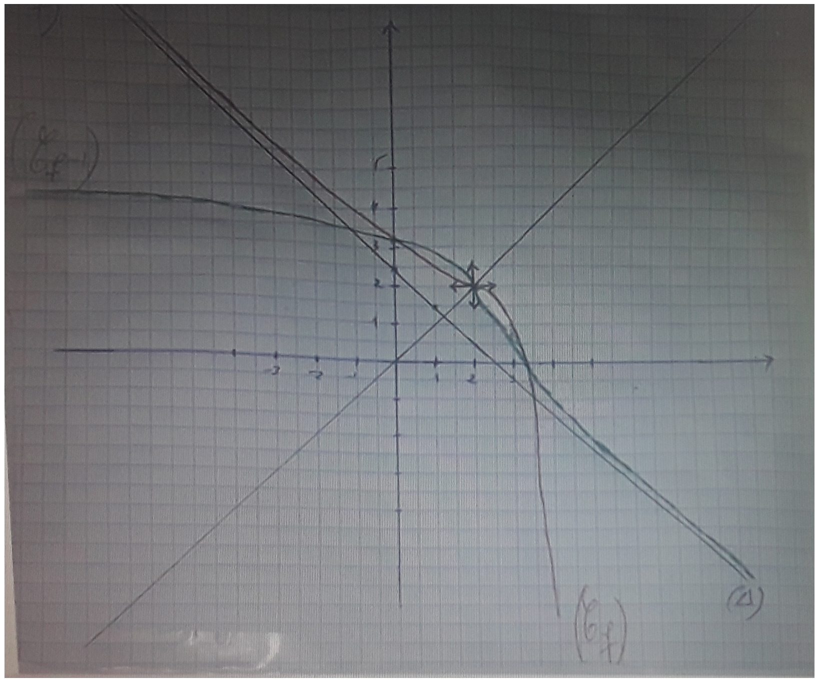
   $$\exists! \alpha \in]2+\ln 3, 2+\ln 4[\,/\, \ f(\alpha)=0$$

   - *Cherchons un encadrement de α de longueur* $\ln 4 - \frac{\ln 12}{2}$:
     on calcule le centre de l'intervalle $]2+\ln 3, 2+\ln 4[$ le nombre c tel que :, $c = \frac{2+\ln 3+2+\ln 4}{2} = \frac{4+\ln 12}{2} \sim 3.242\,5$, *et comme* $f(\frac{4+\ln 12}{2}) \sim 0,185466$ *et* $f(2+\ln 4) = -0,886294$, *et comme* $f(\frac{4+\ln 12}{2}) \times f(2+\ln 4) \prec 0$. *Donc :*

     $$\frac{4+\ln 12}{2} \prec \alpha \prec 2+\ln 4$$

     la longueur de l'encadrement est : $2+\ln 4-(\frac{4+\ln 12}{2}) = 2+\ln 4-2-\frac{\ln 12}{2} = \ln 4-\frac{\ln 12}{2}$.

5.



6. **a)** *La fonction f est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, alors elle admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur J telle que :* $J = f(I) = f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

   b) Voir la courbe.

   c) *Calculons :* $(f^{-1})'(2 - \ln 3)$.

   On a : $f(2+\ln 3) = 2 - \ln 3$ *et comme f est dérivable en* $2+\ln 3$ *et* $f'(2+\ln 3) \neq 0$, *alors f^{-1} est dérivable en* $2 - \ln 3$ *et on a :*

$$(f^{-1})'(2-\ln 3) = \frac{1}{f'(f^{-1}(2-\ln 3))} = \frac{1}{f'(2+\ln 3)} = \frac{-1}{4}$$

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**