Les équations différentielles

Equation différentielle du premier ordre

Introduction

Une équation différentielle est une équation :

- dont l'inconnue est une fonction (généralement notée $y(x)$ ou simplement y).
- dans laquelle aparaissent certaines des dérivées de la fonction (dérivée premiére y', ou dérivées d'ordres supérieurs y'', $y^{(3)}, \ldots$)

Exemple 1 *on considère les équations différentielle suivantes :*

1. $y' + 2y = 0$ *est une équation différentielle de* 1^{er} *ordre sans second membre.*
2. $y'' - 3y' + 5y = e^x$ *est une équation différentielle de* $2^{éme}$ *ordre avec second membre.*

L'équation : $y\prime = ay + b$ avec $a \in \mathbb{R}^*$

L'équation $y' = ay$ avec $a \in \mathbb{R}^*$

Soit a un réel non nul et considèrons l'équation différentielle (E) : $y' = ay$

$$y' = ay \iff (\forall x \in \mathbb{R}),\ y'(x) = ay(x)$$

- La fonction nulle g $(\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 0)$ est une solution de l'équation différentielle.
- On suppose que y ne s'annule pas sur l'ensemble $\mathbb{R}$ on aura :

$$\begin{aligned}
(E) &\iff (\forall x \in \mathbb{R}),\ y'(x) = ay(x) \\
&\iff (\forall x \in \mathbb{R}),\ \frac{y'(x)}{y(x)} = a \\
&\iff (\forall x \in \mathbb{R}),\ \ln|y(x)| = ax + k\ ,\ k \in \mathbb{R} \\
&\iff (\forall x \in \mathbb{R}),\ |y(x)| = e^{ax+k},\ \ k \in \mathbb{R} \\
&\iff (\forall x \in \mathbb{R}),\ |y(x)| = e^k e^{ax},\ k \in \mathbb{R} \\
&\iff (\forall x \in \mathbb{R}),\ y(x) = \lambda e^{ax},\ \ \lambda \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

et puisque même la fonction nulle g peut s'écrire de la forme $g(x) = \lambda e^{ax}$ avec $\lambda = 0$, on peut conclure la propriété suivante :

Proposition 2 *Soit a un réel non nul et $(E) : y' = ay$ une équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$. La solution générale de l'équation différentielle (E) est l'ensemble des fonctions $y(x) = \lambda e^{ax}$ où λ est un réel.*

Exemple 3 *Résoudre l'équation différentielle $(E) : 2y' + 3y = 0$.*
On a :

$$2y' + 3y = 0 \iff y' = \frac{-3}{2}y$$

Donc, la solution générale de l'équation différentielle (E) est l'ensemble des fonctions $y(x) = \lambda e^{\frac{-3}{2}x}$ avec λ est un réel.

L'équation $y' = ay + b$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$

Soient a un réel non nul et b un réel quelconque, considèrons l'équation différentielle (E) : $y' = ay + b$

$$\begin{aligned}
(E) &\iff (\forall x \in \mathbb{R}),\ y'(x) = ay(x) + b \\
&\iff (\forall x \in \mathbb{R}),\ y'(x) = a(y(x) + \frac{b}{a}) \\
&\iff (\forall x \in \mathbb{R}),\ (y(x) + \frac{b}{a})' = a(y(x) + \frac{b}{a}) \\
&\iff (\forall x \in \mathbb{R}),\ z'(x) = az(x)\ ,\ \textit{avec}\ z(x) = y(x) + \frac{b}{a} \\
&\iff (\forall x \in \mathbb{R}),\ y(x) + \frac{b}{a} = \lambda e^{ax} \\
&\iff (\forall x \in \mathbb{R}),\ y(x) = \lambda e^{ax} - \frac{b}{a}
\end{aligned}$$

Proposition 4 *Soit a un réel non nul et b un réel, $(E) : y' = ay+b$ une équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$. La solution générale de l'équation différentielle (E) est l'ensemble des fonctions $y(x) = \lambda e^{ax} - \frac{b}{a}$ où λ est un réel.*

Remarque 5 *Le réel λ dans la solution générale de l'équation différentielle (E) peut-être déterminé par les conditions initiales.*

Exemple 6
1. *Résoudre l'équation différentielle $(E) : y' + 2y = 3$.*
2. *Déterminer la solution φ de (E) telle que : $\varphi(1) = -1$.*

   Solution

   - *Résolvons l'équation (E) :*

     $$y' + 2y = 3 \iff y' = -2y + 3$$

     Donc, la solution générale de l'équation différentielle (E) est l'ensemble des fonctions $y(x) = \lambda e^{-2x} + \frac{3}{2}$ avec λ est un réel.

- φ *est une solution de* (E) *donc* $\varphi(x) = \lambda e^{-2x} + \frac{3}{2}$, *et comme* $\varphi(1) = -1$ *alors on obtient :*

$$\lambda e^{-2} + \frac{3}{2} = -1 \iff \lambda e^{-2} = \frac{-5}{2} \iff \lambda = \frac{-5e^2}{2}$$

Par suite

$$\varphi(x) = \frac{-5e^2}{2} e^{-2x} + \frac{3}{2}$$

L'équation différentielle de second ordre : $ay''+by'+cy = 0$

Soit a un réel non nul et b et c sont des réels quelconques.

Définition 7 *Considèrons l'équation différentielle :* $(E) : ay'' + by' + cy = 0$ *l'équation* $(E') : ar^2 + br + c = 0$ *a variable réelle* r *s'appelle l'équation caractéristique de l'équation différentielle* (E).

Exemple 8 *L'équation caractéristique de l'équation différentielle* $(E) : -3y'' + 2y' - 4y = 0$ *est :* $(E') : -3r^2 + 2r - 4 = 0$.

Résolution de l'équation différentielle : $ay'' + by' + cy = 0$

Considèrons l'équation différentielle : $(E) : ay''+by'+cy = 0$ l'équation $(E') : ar^2+br+c = 0$ a variable réelle r.

1er cas : Si $\Delta \succ 0$ alors l'équation (E') a deux racines, r_1 et r_2 réelles et distinctes. Les fonctions y_1 et y_2 définies sur $\mathbb{R}$ par : $y_1(x) = e^{r_1 x}$ et $y_2(x) = e^{r_2 x}$ sont des solutions à valeurs réelles. Nous admettons que toute solution réelle s'écrit : $y(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$ avec A et B sont deux réels.

2éme cas : Si $\Delta \prec 0$ alors l'équation $ar^2 + br + c = 0$ a deux racines, z_1 et z_2 complexes conjuguées. Alors les fonctions g_1 et g_2 définies sur $\mathbb{R}$ par : $g_1(x) = e^{z_1 x}$ et $g_1(x) = e^{\overline{z_1} x}$ sont des solutions à valeurs complexes. Notons $z_1 = \alpha + i\omega$ avec $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$ sont des réels. Donc

$$\begin{aligned} g_1(x) &= e^{z_1 x} = e^{(\alpha+i\omega)x} = e^{\alpha x} e^{i\omega x} = e^{\alpha x}(\cos(\omega x) + i\sin(\omega x)) \quad et \\ g_2(x) &= e^{\overline{z_1} x} = e^{(\alpha-i\omega)x} = e^{\alpha x} e^{-i\omega x} = e^{\alpha x}(\cos(\omega x) - i\sin(\omega x)) \end{aligned}$$

comme $y_1(x) = \frac{g_1(x)-g_2(x)}{2}$ et $y_2(x) = \frac{g_1(x)+g_2(x)}{2i}$ sont aussi des solutions de l'equation différentielle (E) à valeurs réelles.

Nous admettrons que toutes les solutions s'écrivent de la forme : $y = Ae^{\alpha x}\cos(\omega x) + Be^{\alpha x}\cos(\omega x)$.Pour résumer : si $z_1 = p + iq$ alors toutes les solutions de l'ED s'écrivent de la forme :

$$y(x) = e^{px}(A\cos(qx) + B\sin(qx)) \quad \textit{avec } A \textit{ et } B \textit{ deux réels.}$$

3éme cas: Si $\Delta = 0$ l'équation $ar^2 + br + c = 0$ a une racine double $r = \frac{-b}{2a}$.

La fonction $y_1 = e^{rx}$ définie sur $\mathbb{R}$ est solution de l'ED (E) ; nous admettrons que la fonction $y_2(x) = e^{rx}$ est aussi solution de (E) et que toutes les solutions de (E) s'écrivent sous la forme

$$y(x) = (Ax + B)e^{rx} \text{ avec } A \text{ et } B \text{ sont deux réels}$$

théorème 9 *Soit l'équation différentielle* $(E) : ay'' + by' + cy = 0$ *et soit* $(E') : ar^2 + br + c = 0$ *son équation caratéristique* $\Delta = b^2 - 4ac$ *le discriminant de* (E').

- *Si* $\Delta \succ 0$ *l'équation* (E') *a deux racines* r_1 *et* r_2 *réelles et distinctes et les solutions de l'équation* (E) *sont les fonctions* $y(x) = Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}$ *avec* A *et* B *deux réels.*
- *Si* $\Delta \prec 0$ *l'équation* (E') *a deux racines* z_1 *et* z_2 *complexes conjuguées et si* $z_1 = p - iq$ *alors les solutions de l'équation* (E) *sont les fonctions* $y(x) = e^{px}(A\cos(qx) + B\sin(qx))$ *avec* A *et* B *deux réels.*
- $\Delta = 0$ *l'équation* (E') *admet une racine double* $r = -\frac{b}{2a}$ *et les solutions de l'équation* (E) *sont les fonctions :* $y(x) = (Ax + B)e^{rx}$ *avec* A *et* B *deux réels.*

Exemple 10 *1. Résoudre l'équation différentielle suivante :* $(E) : y'' - 4y' + 5y = 0$.

2. Déterminer la solution f *de* (E) *telle que :* $f(0) = 1$ *et* $f'(0) = -1$.

Solution

- *L'équation caratéristique :* $(E') : r^2 - 4r + 5 = 0$. *Cherchons* Δ *:*

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 20 = -4 \prec 0$$

Donc, l'équation (E') *admet deux solutions complexes conjuguées :* r_1 *et* r_2

$$r_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{4 + 2i}{2} = 2 + i$$

et comme : $r_2 = \overline{r_1} = (\overline{2 + i}) = 2 - i$. *Donc les solutions de l'équation* (E') *sont :* $2 - i$ *et* $2 + i$.

D'où, on prend : $p = 2$ *et* $q = 1$. *Donc, les solutions de l'équation* (E) *sont les fonctions :* $y(x) = e^{2x}(A\cos x + B\sin x)$, *avec* A *et* B *deux réels.*

- *La fonction* f *est solution de l'équation* (E), *donc* $f(x) = e^{2x}(A\cos x + B\sin x)$. *Cherchons* A *et* B.

$$f(0) = 1 \iff A = 1$$

D'autre part, calculons la fonction déivée f' *:*

$$f'(x) = 2e^{2x}(\cos x + B\sin x) + e^{2x}(-\sin x + B\cos x)$$

Donc

$$f'(0) = 1 \iff 2 + B = 1 \iff B = -3$$

Par suite, les solutions de l'équation (E) *sont :* $f(x) = e^{2x}(\cos x - 3\sin x)$.

Exemple 11 1. *Résoudre l'équation différentielle suivante :* $(E) : y'' - 2y' - 3y = 0.$

2. *Déterminer la solution f de (E) telle que : $f(0) = 1$ et $f'(0) = -1$.*

   Solution

   - *L'équation caratéristique :* $(E') : r^2 - 2r - 3 = 0$. *Cherchons* Δ :

     $$\Delta = b^2 - 4ac = 4 + 12 = 16 \succ 0$$

     Donc, l'équation (E') admet deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2 :

     $$r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+4}{2} = 3 \quad et \quad r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-4}{2} = -1$$

     Donc, les solutions de l'équation (E) sont les fonctions : $y(x) = Ae^{3x} + Be^{-x}$, avec A et B deux réels.

   - *La fonction f est solution de l'équation (E), donc $f(x) = Ae^{-x} + Be^{3x}$.*
     Cherchons A et B.

     $$f(0) = 1 \iff A + B = 1$$

     D'autre part, calculons la fonction déivée f' :

     $$f'(x) = -Ae^{-x} + 3Be^{3x}$$

     Donc

     $$f'(0) = -1 \iff -A + 3B = -1$$

     On obtient le systéme suivant : $\begin{cases} A + B = 1 \\ -A + 3B = -1 \end{cases}$
     On fait la somme des deux équations, on obtient :

     $$(A + B) + (-A + 3B) = 0 \implies 4B = 0 \implies B = 0$$

     et comme : $A + B = 1$ et on a $B = 0$. Alors : $A = 1$.
     Donc, on aura

     $$f(x) = e^{-x}$$

Exemple 12 *Résoudre l'équation différentielle suivante :* $(E) : y'' + 2y' + y = 0.$

- *L'équation caratéristique :* $(E') : r^2 + 2r + 1 = 0$. *Cherchons* Δ :

  $$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 = 0$$

  Donc, l'équation (E') admet une racine $r = \frac{-b}{2a} = -1$.
  Donc, les solutions de l'équation (E) sont les fonctions : $y(x) = (Ax + B)e^{-x}$, avec A et B deux réels.

FIN

Pr : Yahya MATIOUI

www.etude − generale.com