Géométrie dans l'espace

Dans tout ce qui suit, l'espace est muni d'un repére orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

Produit scalaire dans l'espace

Forme analytique du produit scalaire

Propriété 1 *Si* $\overrightarrow{u}(a,b,c)$ *et* $\overrightarrow{v}(a',b',c')$ *sont deux vecteurs dans l'espace, alors :*

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = aa' + bb' + cc'$$

-***Norme d'un vecteur*** : *en particulier :* $\|\overrightarrow{u}\|^2 = a^2+b^2+c^2$, *donc* $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

-***Distance entre deux points*** : *Si* $A(x_A, y_A, z_A)$ *et* $B(x_B, y_B, z_B)$ *sont deux points de l'espace, alors :*

$$AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Propriété 2 *Dans l'espace, le produit scalaire est :*

- *commutatif :* $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$
- *distributif (bilinéarité) par rapport à l'addition de deux vecteurs :*

$$\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}$$

- *distributif (bilinéarité) par rapport à l'multiplication par un scalaire :*

$$(a\overrightarrow{u}).(b\overrightarrow{v}) = ab \times (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})$$

- *Les vecteurs* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *sont orthogonaux si, et seulement si :* $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$.

Exemple 3 *Déterminer le réel* α *pour que les vecteurs* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *soient orthogonaux :* $\overrightarrow{u}(2, \frac{-1}{2}, 5)$ *et* $\overrightarrow{v}(\frac{-2}{5}, 3, \alpha)$.

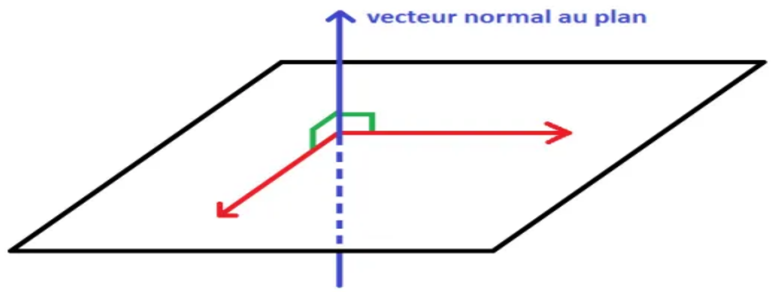
Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *sont orthogonaux si, et seulement si leur produit scalaire est nul. On a donc :*

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} &= 0 \iff \frac{-4}{5} - \frac{3}{2} + 5\alpha = 0 \\ &\iff \alpha = \frac{1}{5}(\frac{4}{5} + \frac{3}{2}) \\ &\iff \alpha = \frac{23}{50} \end{aligned}$$

Equation d'un plan définie par un point et un vecteur normal :

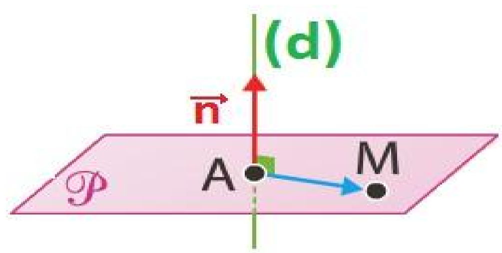
Vecteur normal sur un plan

Définition 4 *Soit (P) un plan de l'espace. On appelle* ***vecteur normal de*** (P) *tout vecteur (non nul) orthogonal à tous les vecteurs directeurs du plan.*



Propriété 5 *Soit $\overrightarrow{n}$ un vecteur non nul et A un point donné de l'espace. L'unique plan (P) passant par A et dont un vecteur normal est $\overrightarrow{n}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que :*

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0$$



Equation cartésienne de (P) :

Posons $\overrightarrow{n}(a, b, c)$ et $A(x_A, y_A, z_A)$, alors :

$$M(x, y, z) \in (P) \iff \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0 \iff a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0.$$

Donc, on obtient :

$$(P) : ax + by + cz + d = 0, \quad avec : \ d = -(ax_A + by_A + cz_A).$$

On conclut, donc la propriété suivante :

Propriété 6 *Si (P) est un plan d'équation cartésienne : $(P) : ax + by + cz + d = 0$, alors un vecteur normal à (P) est : $\overrightarrow{n}(a, b, c)$.*

Exemple 7 *Déterminer une équation cartésienne du plan (P) de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ et passant par un point A.*

$$A(\sqrt{2}, -2, 5) \quad et \quad \overrightarrow{n}(2, -3, -1)$$

On a : $\overrightarrow{n}(2,-3,-1)$ *est le vecteur normal du plan* (P)*. Donc l'équation cartésienne de* (P) *s'écrit sous la forme :* $2x-3y-z+d=0$.
Comme $A\in(P)$*, alors :*

$$2x_A-3y_A-z_A+d=0 \iff 2\sqrt{2}+6-5+d=0 \iff d=-2\sqrt{2}-1$$

Donc, on obtient une équation cartésienne du plan $(P): 2x-3y-z-2\sqrt{2}-1=0$.
Méthode 02
Soit $M(x,y,z)$ *un point du plan* (P) *:*

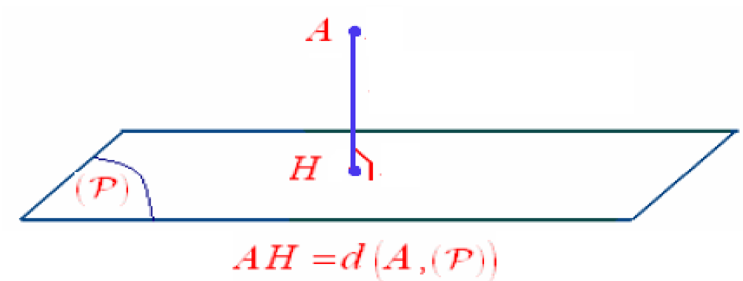
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} &= 0 \iff 2(x-\sqrt{2})-3(y+2)-(z-5)=0\\ &\iff 2x-2\sqrt{2}-3y-6-z+5=0\\ &\iff 2x-3y-z-2\sqrt{2}-1=0\end{aligned}$$

Donc, on obtient une équation cartésienne du plan $(P): 2x-3y-z-2\sqrt{2}-1=0$.

Distance d'un point à un plan :

Propriété 8 *La distance d'un point* M *à un plan* (P) *d'équation :* $(P): ax+by+cz+d=0$ *est :*

$$d(M,(P))=\frac{|ax_M+by_M+cz_M+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$



Projection orthogonale d'un point sur un plan :

Représentation paramétrique d'une droite :

Propriété 9 *Une représentation paramétrique de la droite* (D) *passant par le point* $A(x_A,y_A,z_A)$ *et de vecteur directeur* $\overrightarrow{u}(a,b,c)$ *est :*

$$(D):\begin{cases}x=x_A+at\\ y=y_A+bt \quad /t\in\mathbb{R}\\ z=z_A+ct\end{cases}$$

Question. Déterminer la projection orthogonale H d'un point $A(x_A,y_A,z_A)$ sur un plan (P) d'équation $(P): ax+by+cz+d=0$.
Démarche
On écrit une représentation paramétrique de la droite (D) passant par A et orthogonale à (P)

$$(D):\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} \ /t \in \mathbb{R} \ \ (un\ vecteur\ directeur\ de\ (D)\ est\ :\ \overrightarrow{n}(a,b,c)).$$

le point H est donc le point d'intersection de la droite (D) et le plan (P) tel que :

$$(D) \cap (P) = \{H\}$$

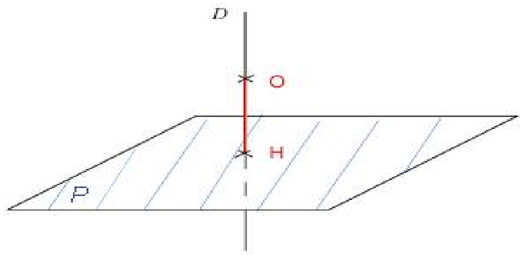


Figure 1

Positions relatives d'un droite et plan- de deux plans.

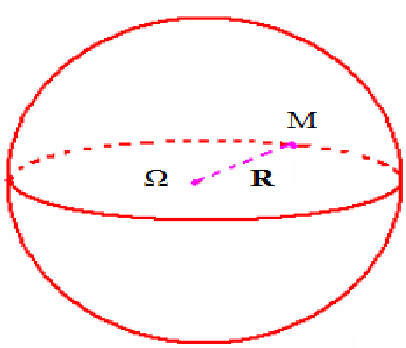
Propriété 10 *Si* (D) *une droite de vecteur directeur* $\overrightarrow{u}(a,b,c)$, (P) *et* (Q) *deux plans d'équations respectives :* $ax+by+cz+d=0$ *et* $a'x+b'y+c'z+d'=0$. *Alors :*

- $(D)\|(P) \iff \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{n}$.(*avec* $\overrightarrow{n}$ *le vecteur normal de* (P)).
- $(P) \perp (Q) \iff \overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{n'}$ (*avec* $\overrightarrow{n'}$ *le vecteur normal de* (Q))
- $(D) \perp (P) \iff \overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{n}$ *sont colinéaires.*
- $(P)\|(Q) \iff \overrightarrow{n}$ *et* $\overrightarrow{n'}$ *sont colinéaires.*

Etude analytique de la sphère dans l'espace

Equation d'une sphère définie par son centre et son rayon :

Définition 11 *Soit* Ω *un point donné de l'espace et* R *un nombre réel strictement positif. La sphère de centre* Ω *est de rayon* R *est l'ensemble des points* M *de l'espace tels que :* $\Omega M = R$, *on la note par* $S_{(\Omega,R)}$ *ou tout simplement* (S).



Equation de (S) :

Si $\Omega(a,b,c)$, alors :

$$\begin{aligned} M(x,y,z) \in (S) &\iff \Omega M = R \\ &\iff \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2} = R \\ &\iff (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = R^2 \end{aligned}$$

Donc, une équation de la shpére (S) est :

$$(S) : (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = R^2$$

Remarque 12 *Une équation de* (S) *s'écrit sous la forme :* $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ *avec* $d = a^2+b^2+c^2-R^2$.

Propriété 13 *Inversement,* $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ *est l'équation d'une sphére* (S) *si et seulement si :* $a^2+b^2+c^2-d \succ 0$*. Dans ce cas : le centre de* (S) *est* $\Omega(a,b,c)$*, et son rayon est* $R = \sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

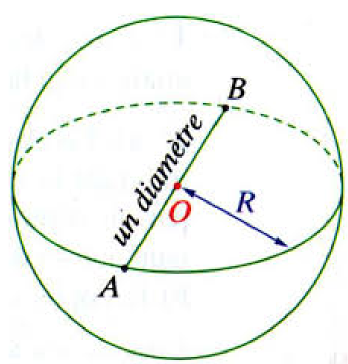
Exemple 14 *On considère la sphére* (S) *d'équation :* $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-1=0$. *Montrer que le centre de* (S) *est* $\Omega(1,1,1)$ *et le rayon est :* 2.

$$\begin{aligned} M(x,y,z) \in (S) &\iff x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-1=0 \\ &\iff x^2-2x+y^2-2y+z^2-2z=1 \\ &\iff (x^2-2x+1)+(y^2-2y+1)+(z^2-2z+1)=3+1 \\ &\iff (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=4 \end{aligned}$$

Donc, (S) *est la la sphére de centre* $\Omega(1,1,1)$ *et de rayon* $R=2$.

Equation cartésienne d'une sphère définie par l'un de ses diamètre

Propriété 15 *Si* A *et* B *sont deux points distincts de l'espace, alors l'ensemble des points* $M(x,y,z)$ *tels que :* $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$ *est la sphère* (S) *de diamètre* $[AB]$.



On a :

$$M(x,y,z) \in (S) \iff (x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)+(z-z_A)(z-z_B)=0$$

Remarque 16 *La sphère* (S). *Le diamètre* $[AB]$, *a pour centre le point* I *milieu du segement* $[AB]$ *et a pour rayon* $R = \frac{1}{2}AB$.

Donc

$$I(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}) \quad et \quad AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Donc, une équation cartésienne de (S) *est :*

$$(x - \frac{x_A + x_B}{2})^2 + (y - \frac{y_A + y_B}{2})^2 + (z - \frac{z_A + z_B}{2})^2 = \frac{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}{4}$$

Exemple 17 *On considère les points :* $A(-1, 2, 1)$ *et* $B(1, -1, 0)$.

écrire une équation cartésienne de la sphère (S) *de diamètre* $[AB]$.

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in (S) &\iff \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0 \\ &\iff (x+1)(x-1) + (y-2)(y+1) + (z-1)z = 0 \\ &\iff x^2 + y^2 + z^2 - y - z - 3 = 0 \end{aligned}$$

Donc, une équation cartésienne de la sphère (S) *de diamètre* $[AB]$ *est :*

$$(S) : x^2 + y^2 + z^2 - y - z - 3 = 0$$

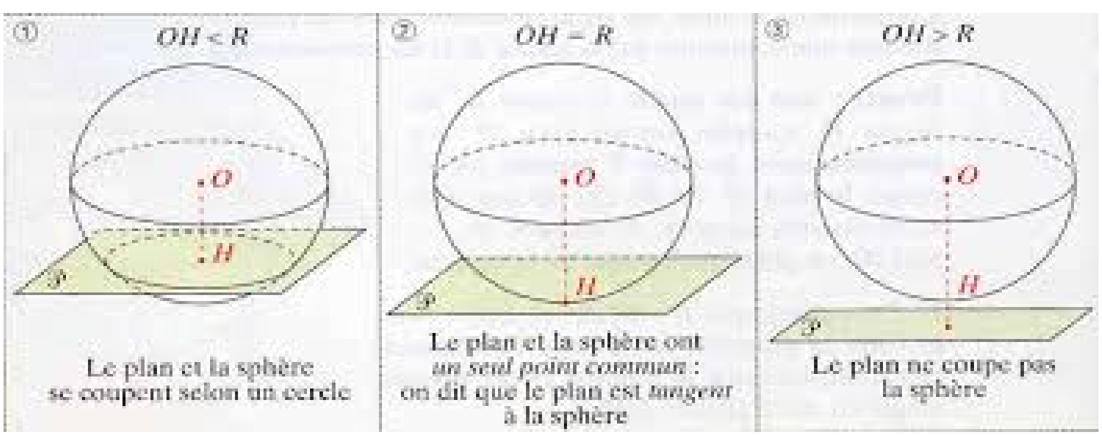
Position relative d'une sphère et d'un plan

On considére une sphère (S) de rayon R et de centre Ω et un plan (P) d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$. On pose : $d(\Omega, (P)) = \Omega H$, avec H est la projection orthogonale de Ω sur le plan (P).

On a

$$d(\Omega, (P)) = \frac{|ax_\Omega + by_\Omega + cz_\Omega + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Le schéma suivant résume les différentes positions relatives de (S) et (P).



Exemple 18 *On considére le plan* (P) *passant par le point* $A(0, 1, 1)$ *et dont* $\overrightarrow{u}(1, 0, -1)$ *est un vecteur normal et la sphère* (S) *de centre le point* $\Omega(0, 1, -1)$ *et de rayon* $\sqrt{2}$.

1. *Montrer que $x - z + 1 = 0$ est une équation cartésienne du plan (P).*
2. *Montrer que le plan (P) est tangente à la sphère (S), puis vérifier que $B(-1, 1, 0)$ est le point de contact.*

Solution 19 1. *Montrons que $x - z + 1 = 0$ est une équation cartésienne du plan (P).*

Soit $M(x, y, z)$ un point du plan (P)

$$\begin{array}{rcl}\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{u} & = & 0 \iff x \times 1 + (y-1) \times 0 + (z-1) \times (-1) = 0 \\ & \iff & x - (z-1) = 0 \\ & \iff & x - z + 1 = 0\end{array}$$

Donc, on obtient une équation cartésienne du plan $(P) : x - z + 1 = 0$.

– *Montrons que le plan (P) est tangente à la sphère (S).*
  Calculons la distance du point Ω au plan (P) : $d(\Omega, (P))$

$$\begin{array}{rcl}d(\Omega, (P)) & = & \dfrac{|x_\Omega - z_\Omega + 1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ & = & \dfrac{|0 - (-1) + 1|}{\sqrt{1^2 + 0 + 1^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.\end{array}$$

  et comme $R = \sqrt{2}$ et $d(\Omega, (P)) = \sqrt{2}$. Donc, on obtient $d(\Omega, (P)) = R = \sqrt{2}$. Ce qui signifie que le plan (P) est tangente à la sphère (S).

– *Vérifions maintenant que le point $B(-1, 1, 0)$ est le point de contact.*
  Il suffit de montrer que : $B \in (P)$ et $B \in (S)$.

  - *On remplace par les coordonnées du point $B(-1, 1, 0)$ dans l'équation du plan (P), on obtient :*

$$x_B - z_B + 1 = -1 - 0 + 1 = 0$$

    Donc : $B \in (P)$.
  - *Cherchons d'abord l'équation de la sphère (S).*
    (S) est la sphère de centre $\Omega(0, 1, -1)$ et de rayon $\sqrt{2}$. Donc, obtient :

    $(S) : (x-0)^2+(y-1)^2+(z-(-1))^2 = (\sqrt{2})^2 \iff (S) : x^2+(y-1)^2+(z+1)^2 = 2$

    et on a : $x_B^2 + (y_B - 1)^2 + (z_B + 1)^2 = 1 + 1 = 2$. Donc : $B \in (S)$. Ceci signifie que le point $B(-1, 1, 0)$ est le point de contact de (S) et (P). Autrement dit :

$$(P) \cap (S) = \{B\}$$

Plan tangent à une sphère en l'un de ses points

Soit la sphère (S) de centre Ω et de rayon R et A un de ses points.

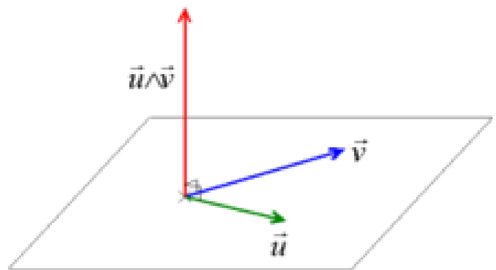
Si (P) est le plan tangent à (S) en A, alors (P) passe par A et $\overrightarrow{A\Omega}$ est un vecteur normal à (P). Donc :

$$M(x, y, z) \in (P) \iff \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{A\Omega} \iff \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{A\Omega} = 0$$

Produit vectoriel dans l'espace

Définition géométrique du produit vectoriel

Définition 20 *Soient $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ deux vecteurs non colinéaires. Le produit vectoriel de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ noté $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$, est le vecteur $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AD}$ défini par :*



- $(AD) \perp (ABC)$
- *Le repére* $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ *est direct.*
- $\|\overrightarrow{w}\| = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \sin(\widehat{ABC})$. *C'est-à-dire :* $AD = AB \times AC \times \sin(\widehat{ABC})$.

Si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, alors $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

Propriété 21 – *On a : $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ c'équivaux $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires. Donc les trois points A, B et C sont alignés si et seulement si : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}$.*

– *On a : $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{v}$. Donc si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs directeurs d'un plan (P) alors un vecteur normal à (P) est : $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$.*

Remarque 22 *Si A, B et C sont trois points non alignés, alors un vecteur normal au plan (ABC) est : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.*

Surface d'un triangle

Propriété 23 *L'aire d'un triangle ABC est :*

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB}\right\|$$

Distance d'un point à une droite

Propriété 24 *Soit (D) une droite passant par un point A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$. La distance d'un point M à la droite (D) est :*

$$d(A, (D)) = \frac{\left\|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u}\right\|}{\|\overrightarrow{u}\|}$$

Forme analytique du produit vectoriel

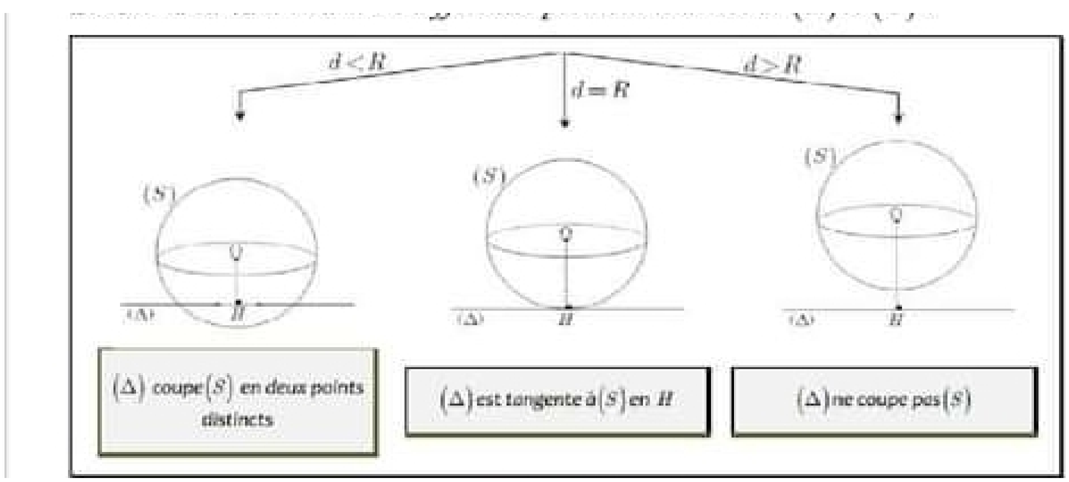
Propriété 25 *L'espace muni d'un repére orthonormé* $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
Si $\overrightarrow{u}(a, b, c)$ *et* $\overrightarrow{v}(a', b', c')$, *alors :*

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\left(\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \right)$$

Position relative d'une droite et d'une sphère

(S) est la sphère de centre Ω et de rayon R et (Δ) une droite de l'espace H est la projection orthogonale de Ω sur la droite (Δ) et d est la distance entre le point Ω et la droite (Δ) tel que : $d = d(\Omega, (\Delta))$.

Le schéma suivant résume les différentes positions relatives de (S) et (Δ) :



FIN

Pr : Yahya MATIOUI

www.etude – generale.com