Bac Blanc N2
Durée 3H

Exercice 1 (4 *points*)

On considère la suite numérique (u_n) *définie par :* $u_0 = \frac{3}{2}$ *et pour* n *de* $\mathbb{N}$ *:*

$$u_{n+1} = \frac{1}{2021}u_n + \frac{2020}{2021}$$

1. **a)** *Montrer par récurrence que :* $u_n \geq 1$ *pour tout entier naturel* n.

   b) *Vérifier que :* $u_{n+1} - u_n = \frac{2020}{2021}(1 - u_n)$ *pour tout entier naturel* n *puis montrer que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante.*

   c) *En déduire que :* $u_n \leq \frac{3}{2}$ *pour tout entier naturel* n.

2. *Soit* (v_n) *la suite numérique telle que :* $v_n = u_n - 1$ *pour tout entier naturel* n.

   a) *Montrer que :* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite géométrique de raison* $q = \frac{1}{2021}$.

   b) *Exprimer* v_n *en fonction de* n, *puis* u_n *en fonction de* n.

3. *Montrer que :* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\ln(u_n)}{u_n - 1} = 1$.

Exercice 2 (5 *points*)

1. *Dans l'ensemble* $\mathbb{C}$ *des nombres complexes, on considère l'équation :*

$$(E) : z^2 - 2(\sqrt{2} + \sqrt{6})z + 16 = 0$$

   a) *Vérifier que le discriminant de l'équation* (E) *est :* $\Delta = -4(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2$

   b) *En déduire les solutions de l'équation* (E).

2. *Soient les nombres complexes :* $a = (\sqrt{6}+\sqrt{2})+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})$, $b = 1+i\sqrt{3}$ *et* $c = \sqrt{2}+i\sqrt{2}$

   a) *Vérifier que :* $b\overline{c} = a$, *puis en déduire que* $ac = 4b$.

   b) *Ecrire les nombres complexes* b *et* c *sous forme trigonométrique.*

   c) *En déduire que :* $a = 4(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})$.

3. *Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct* $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, *on considère les points* B, C *et* D *d'affixes respectives* b, c *et* d *telle que* $d = a^4$. *Soient* z *l'affixe d'un point* M *du plan et* z' *l'affixe de* M' *image de* M *par le rotation* R *de centre* O *et d'angle* $\frac{\pi}{12}$.

   a) *Vérifier que :* $z' = \frac{1}{4}az$

b) *Déterminer l'image du point C par la rotation R.*

c) *Déterminer la nature du triangle OBC.*

d) *Montrer que $a^4 = 128b$ et en déduire que les points O, B et D sont alignés.*

Exercice 3 (3 *points*)

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on pose : $A(\theta) = \cos^2(\theta)\sin^4(\theta)$.

1. *En linéarisant l'expression $A(\theta)$, montrer que :* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} A(\theta)d\theta = \frac{\pi}{32}$.

2. *En utilisant une intégration par parties, montrer que :* $\int_0^1 (1+2x)e^{2x}dx = e^2$ *et* $\int_0^{e-1} \ln(1+x)dx = 1$.

Problème d'analyse 4 (8 *points*)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4)$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. (unité : 2cm).

1. *Montrer que* $\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ *et* $\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

   a) *Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = -x + \frac{5}{2}$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.*

   b) *Résoudre l'équation $e^{x-2} - 4 = 0$ puis montrer que la courbe (C) est au dessus de (Δ) sur l'intervalle $]-\infty, 2 + \ln 4]$ et en dessous de (Δ) sur l'intervalle $[2 + \ln 4, +\infty[$.*

2. *Montrer que* $\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ *puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.*

   a) *Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,* $f'(x) = -(e^{x-2} - 1)^2$

   b) *Dresser le tableau de variations de la fonction f.*

3. *Calculer $f''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, puis montrer que $A(2, 2)$ est un point d'inflexion de (C).*

4. *Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α telle que :* $2 + \ln 3 \prec \alpha \prec 2 + \ln 4$, *puis en utilisant la méthode de dichotomie déterminer un encadrement de α de longueur* $\ln 4 - \frac{\ln 12}{2}$.

5. *Construire (Δ) et (C) dans le même repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ (on prend $\ln 2 \approx 0,7$ et $\ln 3 \approx 1,1$).*

6. **a)** *Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.*

   b) *Construire dans le même repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ la courbe représentative de la fonction f^{-1}.*

   c) *Justifier puis calculer $(f^{-1})'(2 - \ln 3)$. (Indication : $f^{-1}(2 - \ln 3) = 2 + \ln 3$).*