Bac Blanc N3
Durée 3H

Exercice 1 (4 *points*)

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :* $u_0 = 3$ *et* $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{4}{3}$.

1. *Montrer par récurrence que* $u_n \succ 2$ *pour tout entier* $n \in \mathbb{N}$.
2. *Déterminer la monotonie de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *puis en déduire qu'elle est convergente.*
3. *Soit* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite numérique telle que :* $v_n = u_n - 2$

   a) *Montrer que* (v_n) *est une suite géométrique de raison* $\frac{1}{3}$ *puis écrire* v_n *en fonction de* n.

   b) *Ecrire* u_n *en fonction de* n *pour tout entier naturel* n, *puis calculer* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n$

   c) *Calculer* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} w_n$ *telle que* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite numérique définie par :* $w_n = \ln(u_n)$.
4. *On pose* $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{n-1}$. *Montrer que :* $S_n = \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) + 2n$

Exercice 2 (5 *points*)

1. *Dans l'ensemble* $\mathbb{C}$, *on considère l'équation* $(E) : z^2 - \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)z + \frac{1}{2} = 0$

   a) *Vérifier que le discriminant de l'équation* (E) *est :* $\Delta = -\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2$

   b) *En déduire les solutions de l'équation :* (E).
2. *Soient les nombres complexes :* $a = 1 + i$, $b = 1 - i\sqrt{3}$ *et* $c = \frac{1-\sqrt{3}}{4} + \frac{1+\sqrt{3}}{4}i$

   a) *Vérifier que :* $c = \frac{a}{b}$.

   b) *Ecrire* a *et* b *sous forme trigonométrique.*

   c) *En déduire que :* $c = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)$.

   d) *En déduire de ce qui précède que :* $\tan\left(\frac{7\pi}{12}\right) = -2 - \sqrt{3}$.
3. *Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct* $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. *On considère le point* B *d'affixe* b *et la translation* T *du vecteur* $\overrightarrow{u}$ *d'affixe* $2i\sqrt{3}$ *et soit* d *l'affixe du point* D *l'image du point* B *par la translation* T.

   a) *Montrer que :* $d = \overline{b}$. $\left(\overline{b}\text{ est le conjugué du nombre complexe } b\right)$.

b) *Vérifier que* : $\arg\left(\frac{b}{d}\right) \equiv \frac{-2\pi}{3}\,[2\pi]$ *puis en déduire une mesure de l'angle orienté* : $\left(\widehat{\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OB}}\right)$.

c) *Vérifier que* : $OD = OB$ *puis en déduire la nature du triangle* OBD.

d) *En déduire l'image du point* D *par la rotation* R *de centre* O *et d'angle* $\frac{-2\pi}{3}$.

Problème d'analyse 3 (11 *points*)

Partie N1 *Soit* g *la fonction numérique définie sur* $\mathbb{R}$ *par* : $g(x) = 1 + (2 - x)\,e^{-x}$.

1) *Montrer que* : $(\forall x \in \mathbb{R})\,,\ g'(x) = (x - 3)\,e^{-x}$.

2) *En déduire la monotonie de la fonction* g *sur les intervalles* : $]-\infty, 3]$ *et* $[3, +\infty[$, *puis dresser le tableau de variations de* g *sur* $\mathbb{R}$.

3) *Montrer que* : $(\forall x \in \mathbb{R})\,,\ g(x) \succ 0$.

Partie N2. *Soit* f *la fonction numérique définie sur* $\mathbb{R}$ *par* : $f(x) = x + (x - 1)\,e^{-x}$

1) *Montrer que* : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

2)-a)- *Montrer que* : $(\forall x \in \mathbb{R})\,,\ f'(x) = g(x)$, *puis dresser le tableau de variations de* f *sur* $\mathbb{R}$.

b)- *Ecrire l'équation de la tangente à la coube* (C_f) *au point d'abscisse* $x_0 = 0$.

3) *Montrer que la courbe* (C_f) *est convexe sur* $[3, +\infty[$ *et concave sur* $]-\infty, 3]$ *et déterminer les coordonnées de son point d'inflexion.*

4) *Montrer que* : $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, *puis interpréter géométriquement le résultat.*

5)-a)- *Montrer que la droite* (Δ) *d'équation* $y = x$ *est une asymptote oblique à la courbe* (C_f) *au voisinage de* $+\infty$.

b)- *Etudier la position relative de la courbe* (C_f) *et de la droite* (Δ).

6)-a)- *Montrer que la courbe* (C_f) *coupe l'axe* (Ox) *en unique point d'abscisse* α *telle que* : $0 \prec \alpha \prec 1$.

b) *Tracer la courbe* (C_f) *dans un repère orthonormé* $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ *tel que* $\left\|\overrightarrow{i}\right\| = \left\|\overrightarrow{j}\right\| = 1cm$.

7)-a)- *En utilisant une intégration par parties, calculer l'intégrale* : $\int_1^{\ln 4} (x - 1)\,e^{-x}dx$.

b) *Déduire, en* cm^2 *l'aire du domaine plan limité par la courbe* (C_f) *et l'axe* (Ox) *et les droites d'équations* : $x = 1$ *et* $x = \ln 4$.

8)-a)- *Montrer que la fonction* f *admet une fonction réciproque* f^{-1} *définie sur* $\mathbb{R}$.

b) *Montrer que la fonction* f^{-1} *est dérivable en* $b = -1$ *et que* : $\left(f^{-1}\right)'(-1) = \frac{1}{3}$. $(Ind : f(0) = -1)$.