Lycée Al Kadi Ayad Salé **2éme BAC PC**
Matiére : Mathématiques **2020/2021**
Professeur : Yahya MATIOUI **www.etude-generale.com**

Série d'exercices sur la Géométrie dans l'espace

Exercice 1 *On considère dans l'espace muni d'un repère orthonormé* $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ *le point* $A(1,-1,3)$ *et le plan* (P) *d'équation :* $x - y + 3z = 0$.

1. **a)** *Vérifier que :* $\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 3t \end{cases} /(t \in \mathbb{R})$ *est une représentation paramétrique de la droite* (OA).

   b) *Déterminer une équation cartésienne du plan* (Q) *orthogonal à la droite* (OA) *au point* A.

   c) *Vérifier que* (P) *est parallèle à* (Q).

2. *On considère la sphère* (S) *tangente au plan* (Q) *en* A *et qui se coupe avec le plan* (P) *suivant le cercle* (Γ) *de centre* O *et de rayon* $\sqrt{33}$.

   a) *Démontrer que* $\Omega(a,b,c)$ *centre de la sphère* (S) *appartient à* (OA) *puis en déduire que* $b = -a$ *et* $c = 3a$.

   b) *Démontrer que :* $\Omega A^2 - \Omega O^2 = 33$ *puis en déduire que :* $a - b + 3c = -11$.

   c) *En déduire les coordonnées de* Ω *centre de la sphère* (S) *puis démontrer que son rayon est égale à* $2\sqrt{11}$.

Exercice 2 *On considère dans l'espace muni d'un repère orthonormé* $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ *les points* $A(2,0,-1)$, $B(2,4,2)$ *et* $C(3,3,3)$ *et la sphère* (S) *d'équation cartésienne :*

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 8z + 20 = 0$$

1. *Démontrer que le centre de la sphère* (S) *est le point* $\Omega(2,2,4)$ *et que son rayon est égal à* 2.

2. *Soit* (P) *le plan passant par le point* A *et orthogonal à la droite* (BC). *Démontrer que :* $x - y + z - 1 = 0$ *est une équation cartésienne du plan* (P).

   a) *Démontrer que le plan* (P) *coupe la sphère* (S) *suivant un cercle* (Γ) *de rayon égale à* 1.

   b) *Déterminer une représentation paramétrique de la droite* (Δ) *passant par* Ω *et orthogonale à* (P).

   c) *Déterminer les coordonnées du point* ω *centre du cercle* (Γ).

Exercice 3 *On considère dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct* $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, *les deux points* $A(2,1,0)$ *et* $B(-4,1,0)$.

1. *Soit (P) le plan passant par le point A et $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$ est un vecteur qui lui est normal.*

   Montrer que : $x + y - z - 3 = 0$ est une équation cartésienne du plan (P).

2. *Soit (S) l'ensemble des points M de l'espace qui vérifient la relation : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$.*

   Montrer que (S) est la sphère de centre $\Omega(-1, 1, 0)$ et de rayon 3.

   a) *Calculer la distance du point Ω du plan (P) et en déduire que (P) coupe (S) suivant un cercle (C).*

   b) *Montrer que le centre du cercle est le point $H(0, 2, -1)$.*

3. *Montrer que : $\overrightarrow{OH} \wedge \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} + 8\overrightarrow{k}$ et en déduire l'aire du triangle OHB.*

Exercice 4 *On considère dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, les points $A(2, 1, 3)$ et $B(3, 1, 1)$ et $C(2, 2, 1)$ et la sphère (S) d'équation :*

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 34 = 0$$

1. **a)** *Montrer que : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$.*

   b) *En déduire que $2x + 2y + z - 9 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).*

2. **a)** *Montrer que le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(1, -1, 0)$ et son rayon est 6.*

   b) *Montrer que $d(\Omega, (ABC)) = 3$ et en déduire que le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ).*

3. **a)** *Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point Ω et orthogonale au plan (ABC).*

   b) *Montrer que le centre du cercle (Γ) est le point B.*

Exercice 5 *On considère dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. La sphère (S) d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 1 = 0$ et le plan (P) d'équation : $y - z = 0$.*

1. **a)** *Montrer que le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(1, 1, 1)$ et son rayon est 2.*

   b) *Calculer $d(\Omega, (P))$ et en déduire que le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (C).*

   c) *Déterminer le centre et le rayon du cercle (C).*

2. *Soit (Δ) la droite passant par le point $A(1, -2, 2)$ et orthogonale au plan (P).*

   a) *Montrer que $\overrightarrow{u}(0, 1, -1)$ est un vecteur directeur de la droite (Δ).*

   b) *Montrer que $\left\|\overrightarrow{\Omega A} \wedge \overrightarrow{u}\right\| = \sqrt{2}\,\|\overrightarrow{u}\|$ et en déduire que la droite (Δ) coupe la sphère (S) en deux points.*

   c) *Déterminer les coordonnées de chacun des deux points de contact de la droite (Δ) et la sphère (S).*

FIN

etude – generale.com