Lycée Les Nobles Sala Al Jadida — **2éme BAC PC**
Matiére : Mathématiques — **2018/2019**
Professeur : Yahya MATIOUI — **www.etude-generale.com**

Devoir Surveillé N8
Durée : 2H

Problème d'analyse 1 *Pour tout entier naturel $n \geq 1$ on pose :*

$$I_n = \frac{1}{2^{n+1} n!} \int_0^1 (1-t)^n e^{\frac{t}{2}} dt$$

1. *à l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1.*
2. *Démontrer que pour tout naturel $n \geq 1$ on a : $I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}$.*
3. *En déduire par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$ on a : $\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2}.\frac{1}{1!} + ... + \frac{1}{2^n}.\frac{1}{n!} + I_n$.*
4. *Montrer que l'on peut trouver une constante A telle que : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{2^n n!}A$. On pourra déterminer A en majorant la fonction : $t \longrightarrow (1-t)^n.e^{\frac{t}{2}}$ sur l'intervalle $[0,1]$.*
5. *En déduire la limite quand n tend vers $+\infty$ de : $u_n = 1 + \frac{1}{2}.\frac{1}{1!} + ... + \frac{1}{2^n}.\frac{1}{n!}$*

Problème d'analyse 2 *On pose, pour tout entier naturel n non nul :*

$$I_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-x)^n e^{-x} dx.$$

1. **a)** *à l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1.*
   b) *Prouver que pour tout entier naturel n non nul : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n!}\int_0^1 e^{-x}dx$. En déduire : $\lim_{n \longrightarrow +\infty} I_n$.*
   c) *Montrer à l'aide d'une intégration par parties que pour tout entier naturel n non nul, on a : $I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} - I_n$.*
2. *On considère la suite réelle (a_n), définie sur $\mathbb{N}^*$ par $a_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n non nul : $a_{n+1} = a_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$.*
   a) *Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul : $a_n = \frac{1}{e} + (-1)^n I_n$.*
   b) *En déduire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.*

Problème d'analyse 3 *Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on considère l'intégrale :*

$$I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$$

1. **a)** *Démontrer que pour tout x dans l'intervalle $]1, e[$ et pour tout entier naturel n, on a : $(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} \succ 0$.*

b) *En déduire que la suite* (I_n) *est décroissante.*

2. **a)** *Calculer* I_1 *à l'aide d'une intégration par parties.*

b) *Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$: $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$

c) *En déduire* I_2, I_3 *et* I_4. *Donner les valeurs exactes, exprimés en fonction de* e *et les valeurs approchées à* 10^{-3} *près par défaut.*

3. **a)** *Démontrer que, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*, I_n \geq 0$.

b) *Démontrer que, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)I_n \leq e$.

c) *En déduire la limite de* I_n.

d) *Déterminer la valeur de* $nI_n + (I_n + I_{n+1})$ *et en déduire la limite de* nI_n.

FIN

Pr : Yahya MATIOUI