Correction de la série le calcul trigonométrique 1

Exercice 1 *On cherche l'abscisse curviligne principale du point M qui admet α comme abscisse curviligne.*

- $\alpha = \frac{7\pi}{2}$:

  Notons α_0 l'abscisse curviligne principale du point M, puisque α est une abscisse curviligne du point M alors : $\alpha = \alpha_0 + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, ensuite : $\alpha_0 = \alpha - 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Or, $\alpha_0 \in \left]-\pi, \pi\right]$, donc : $-\pi \prec \alpha_0 \preceq \pi$, par ailleurs :

$$\begin{aligned} -\pi \quad \prec \quad & \frac{7\pi}{2} - 2k\pi \preceq \pi \\ \iff \quad & -1 \prec \frac{7}{2} - 2k \preceq 1 \\ \iff \quad & -1 - \frac{7}{2} \prec -2k \preceq -\frac{7}{2} + 1 \\ \iff \quad & -\frac{9}{2} \prec -2k \preceq \frac{-5}{2} \\ \iff \quad & \frac{5}{4} \preceq k \prec \frac{9}{4} \\ \iff \quad & 1,25 \preceq k \prec 2,25 \end{aligned}$$

  comme $k \in \mathbb{Z}$, alors $k = 2$. Donc

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{7\pi}{2} - 2k\pi \\ &= \frac{7\pi}{2} - 2 \times 2 \times \pi \\ &= \frac{-\pi}{2} \in \left]-\pi, \pi\right] \end{aligned}$$

  Ce qui signifie que $\frac{-\pi}{2}$ est l'abscisse curiviligne principale du point M.

- $\alpha = \frac{-15\pi}{12}$

  on cherche l'abscisse curviligne principale du point M, en utilisant une autre méthode. On cherche une écriture sous la forme : $\alpha_0 + 2k\pi$ avec $\alpha_0 \in \left]-\pi, \pi\right]$. Donc :

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{-15\pi}{12} \\ &= \frac{-24\pi + 9\pi}{12} \\ &= -2\pi + \frac{9\pi}{12} = \frac{3\pi}{4} - 2\pi \end{aligned}$$

  comme : $\frac{3\pi}{4} \in \left]-\pi, \pi\right]$, donc $\frac{3\pi}{4}$ est l'abscisse curiviligne principale du point M.

- $\alpha = \frac{88\pi}{3}$

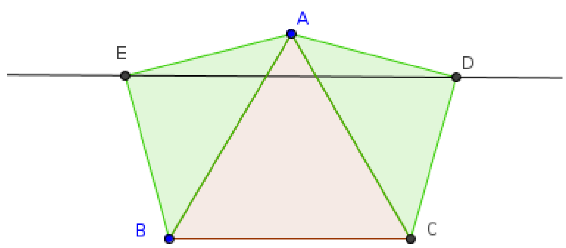
  On cherche une écriture sous la forme : $\alpha_0 + 2k\pi$ *avec* $\alpha_0 \in]-\pi, \pi]$ *. Donc :*

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{88\pi}{3} \\ &= -\frac{2\pi}{3} + 30\pi \\ &= \frac{-2\pi}{3} + 2 \times 15\pi \end{aligned}$$

  comme : $\frac{-2\pi}{3} \in]-\pi, \pi]$*, donc* $\frac{-2\pi}{3}$ *est l'abscisse curiviligne principale du point* M*.*

Exercice 2 *ABC est un triangle équilatèral tel que :* $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$ *.*

1. *La figure :*



2. *On cherche la mesure principale des angles orientés :*

   - $(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}})$:

     La mesure principale de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}})$ *est* $\frac{\pi}{3}$.

   - $(\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}})$.

     *En utilisant l**a relation de chasles**, on obtient :*

$$\begin{aligned} (\overline{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}}) &\equiv (\overline{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}}) + (\overline{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}})\,[2\pi] \\ &\equiv -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\,[2\pi] \\ &\equiv \frac{-7\pi}{12}\,[2\pi] \end{aligned}$$

     car les angles $(\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}})$ *et* $(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}})$ *sont orientés négativement.*

   - $(\widehat{\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{BC}})$.

*En utilisant l**a relation de chasles**, on obtient :*

$$\begin{aligned} (\overline{\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{BC}}) &\equiv (\overline{\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB}}) + (\overline{\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{BC}})\,[2\pi] \\ &\equiv (\overline{\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB}}) + (\overline{-\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BC}})\,[2\pi] \quad (1) \end{aligned}$$

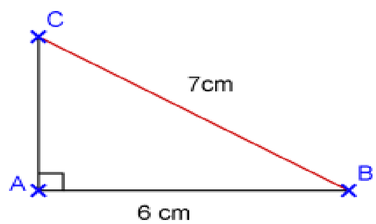
et comme $(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EB}) \equiv \frac{-\pi}{2}\,[2\pi]$, *cherchons* $(\overrightarrow{-BE},\overrightarrow{BC})$:

$$(-\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BC}) \equiv \pi + (\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BC})\,[2\pi] \quad (2)$$

*En utilisant l***a relation de chasles**, *on obtient :* $(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BC}) \equiv (\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})\,[2\pi]$, *ensuite :* $(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BC}) \equiv \frac{-\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$. *Donc :* $(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BC}) \equiv \frac{-7\pi}{12}\,[2\pi]$. *Par ailleurs on remplace dans (2), on obtient :* $(-\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BC}) \equiv \pi - \frac{7\pi}{12}\,[2\pi]$, *donc :* $(-\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BC}) \equiv \frac{5\pi}{12}\,[2\pi]$. *Donc on remplace dans (1), on obtient :* $(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{BC}) \equiv \frac{-\pi}{2} + \frac{5\pi}{12}\,[2\pi]$, *c'est-à-dire :* $(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{BC}) \equiv \frac{-\pi}{12}\,[2\pi]$. *La mesure principale de l'angle* $(\widehat{\overrightarrow{EA},\overrightarrow{BC}})$ *est* $\frac{-\pi}{12}$.

Exercice 3 *Soit ABC un trinagle rectangle en A tel que :* $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) \equiv \frac{\pi}{5}\,[2\pi]$.

1. *Vérifions que :* $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CB}) \equiv (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})\,[2\pi]$



comme : $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CB}) \equiv (\overrightarrow{BA},-\overrightarrow{BC})\,[2\pi]$, *et on sait que :* $(\overrightarrow{BA},-\overrightarrow{BC}) \equiv \pi - (\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})\,[2\pi]$, *donc, on obtient :* $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CB}) \equiv \pi - (\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})\,[2\pi]$.*D'autre part, on sait que :*

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}) \equiv \pi\,[2\pi]$$

Donc : $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}) \equiv \pi - (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) - (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})\,[2\pi]$, *alors*

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CB}) &\equiv \pi - (\pi - (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) - (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}))\,[2\pi]\\ &\equiv \pi - \pi + (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})\,[2\pi]\\ &\equiv (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})\,[2\pi]\end{aligned}$$

On obtient la relation suivante : $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CB}) \equiv (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})\,[2\pi]$.

2. *On cherche l'angle orienté :* $(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CB}})$

   Comme : $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) \equiv \frac{\pi}{5}\,[2\pi]$ *et* $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$, *donc :* $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CB}) \equiv \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5}\,[2\pi]$. *C'est-à-dire :* $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CB}) \equiv \frac{7\pi}{10}\,[2\pi]$. *Donc, la mesure principale de l'angle orienté* $(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CB}})$ *est :* $\frac{7\pi}{10}$.

Exercice 4 *Simplifions les expressions suivantes :*

$$\begin{aligned}
A &= \cos(5\pi + x) - \sin(11\pi - x) + \cos(2\pi - x) - \sin(\frac{9\pi}{2} - x) \\
&= \cos(\pi + x) - \sin(\pi - x) + \cos(-x) - \sin(4\pi + \frac{\pi}{2} - x) \\
&= -\cos x - \sin x + \cos x - \sin(\frac{\pi}{2} - x) \\
&= -\sin x - \cos x
\end{aligned}$$

L'expression B :

$$\begin{aligned}
B &= \sin(\frac{2005\pi}{2} - 2x) + \sin(\pi - 2x) + \cos(37\pi + 2x) \\
&= \sin(\frac{2004\pi + \pi}{2} - 2x) + \sin 2x + \cos(\pi + 36\pi + 2x) \\
&= \sin(1002\pi + \frac{\pi}{2} - 2x) + \sin 2x + \cos(\pi + 2x) \\
&= \sin(\frac{\pi}{2} - 2x) + \sin 2x - \cos 2x \\
&= \cos 2x + \sin 2x - \cos 2x \\
&= \sin 2x
\end{aligned}$$

L'expression C :

$$\begin{aligned}
C &= \tan(-x) + \tan(\pi + x) + \tan(x - 3\pi) \\
&= -\tan x + \tan x + \tan(x - 2\pi - \pi) \\
&= \tan(x - \pi) \\
&= \tan x
\end{aligned}$$

Exercice 5 *Calculons les sommes suivantes :*

$$A = \cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}$$

Simplifions : $\cos\frac{4\pi}{7}$, $\cos\frac{5\pi}{7}$ *et* $\cos\frac{6\pi}{7}$.

$$\cos\frac{4\pi}{7} = \cos(\frac{7\pi - 3\pi}{7}) = \cos(\pi - \frac{3\pi}{7}) = -\cos\frac{3\pi}{7}$$

et

$$\cos\frac{5\pi}{7} = \cos(\frac{7\pi - 2\pi}{7}) = \cos(\pi - \frac{2\pi}{7}) = -\cos\frac{2\pi}{7}$$

encore :

$$\cos\frac{6\pi}{7} = \cos(\frac{7\pi - \pi}{7}) = \cos(\pi - \frac{\pi}{7}) = -\cos\frac{\pi}{7}$$

. Donc, la somme devient :

$$\begin{aligned}
A &= \cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} - \cos\frac{3\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} - \cos\frac{\pi}{7} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$B=\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{2\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{8\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}+\cos\frac{10\pi}{11}$$

Simplifions : $\cos\frac{8\pi}{11}$, $\cos\frac{9\pi}{11}$ *et* $\cos\frac{10\pi}{11}$.

$$\cos\frac{8\pi}{11}=\cos(\frac{11\pi-3\pi}{11})=\cos(\pi-\frac{3\pi}{11})=-\cos\frac{3\pi}{11}$$

et

$$\cos\frac{9\pi}{11}=\cos(\frac{11\pi-9\pi}{7})=\cos(\pi-\frac{2\pi}{11})=-\cos\frac{2\pi}{11}$$

encore :

$$\cos\frac{10\pi}{11}=\cos(\frac{11\pi-\pi}{11})=\cos(\pi-\frac{\pi}{11})=-\cos\frac{\pi}{11}$$

. Donc, la somme devient

$$\begin{aligned} B &= \cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{2\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}-\cos\frac{3\pi}{11}-\cos\frac{2\pi}{11}-\cos\frac{\pi}{11} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$C=\cos^2\frac{\pi}{10}+\cos^2\frac{4\pi}{10}+\cos^2\frac{6\pi}{10}+\cos^2\frac{9\pi}{10}$$

Simplifions : $\cos^2\frac{6\pi}{10}$ *et* $\cos^2\frac{9\pi}{10}$:

$$\cos^2\frac{6\pi}{10}=\cos^2(\frac{5\pi+\pi}{10})=\cos^2(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{10})=\sin^2\frac{\pi}{10}\quad et\quad \cos^2\frac{9\pi}{10}=\cos^2(\frac{5\pi+4\pi}{10})=\cos^2(\frac{\pi}{2}+\frac{4\pi}{10})=\sin^2\frac{4\pi}{10}$$

Donc, la somme devient

$$\begin{aligned} C &= \cos^2\frac{\pi}{10}+\cos^2\frac{4\pi}{10}+\sin^2\frac{\pi}{10}+\sin^2\frac{4\pi}{10} \\ &= \cos^2\frac{\pi}{10}+\sin^2\frac{\pi}{10}+\cos^2\frac{4\pi}{10}+\sin^2\frac{4\pi}{10} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Exercice 6 *Soit* $x\in\mathbb{R}$, *on pose :* $A(x)=\cos x+\sin x-(\cos^3 x+\sin^3 x)$.

1. *Montrons que :* $A(x)=\cos x.\sin x.(\cos x+\sin x)$:

$$\begin{aligned} A(x) &= \cos x+\sin x-(\cos^3 x+\sin^3 x) \\ &= \cos x+\sin x-(\cos x+\sin x)(\cos^2 x-\cos x.\sin x+\sin^2 x) \\ &= \cos x+\sin x-(\cos x+\sin x)(1-\cos x.\sin x) \\ &= (\cos x+\sin x)(1-1+\cos x.\sin x) \\ &= \cos x.\sin x.(\cos x+\sin x) \end{aligned}$$

2. *Vérifions que :* $A(\frac{\pi}{2}+x)=A(-x)$ *et* $A(\pi+x)=-A(x)$:

$$\begin{aligned} A(\frac{\pi}{2}+x) &= \cos(\frac{\pi}{2}+x).\sin(\frac{\pi}{2}+x).(\cos(\frac{\pi}{2}+x)+\sin(\frac{\pi}{2}+x)) \\ &= -\sin x.\cos x(-\sin x+\cos x) \\ &= -\cos x.\sin x.(-\sin x+\cos x) \\ &= A(-x) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} A(\pi + x) &= \cos(\pi + x).\sin(\pi + x).(\cos(\pi + x) + \sin(\pi + x)) \\ &= -\cos x.(-\sin x)(-\cos x - \sin x) \\ &= -\cos x.\sin x.(\cos x + \sin x) \\ &= -A(x) \end{aligned}$$

Exercice 7 *Soit x un réel tel que $x \in [0, \pi]$, on pose :*

$$A(x) = \frac{1}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}$$

1. *Calculons : $A(0)$, $A(\frac{\pi}{4})$ et $A(\frac{\pi}{6})$:*
   $A(0) = \frac{1}{\sin^2 0 + 2\cos^2 0} = \frac{1}{2}$, $A(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{4} + 2\cos^2 \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + 2(\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \frac{1}{\frac{2}{4} + \frac{4}{4}} = \frac{2}{3}$ *et* $A(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{6} + 2\cos^2 \frac{\pi}{6}} = \frac{4}{7}$;

   a) *vérifions que : $A(\pi - x) = A(x)$*

   $$A(\pi - x) = \frac{1}{\sin^2(\pi - x) + 2\cos^2(\pi - x)} = \frac{1}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} = A(x).$$

   b) *On déduit : $A(\frac{5\pi}{6})$, $A(\frac{3\pi}{4})$ et $A(\pi)$*
   On sait que pour tout x de $[0, \pi]$, on a : $A(x) = A(\pi - x)$. Donc si : $x = \frac{5\pi}{6}$, alors

   $$A(\frac{5\pi}{6}) = A(\pi - \frac{5\pi}{6}) = A(\frac{\pi}{6}) = \frac{4}{7}$$

   encore si $x = \frac{3\pi}{4}$, on obtient :

   $$A(\frac{3\pi}{4}) = A(\pi - \frac{3\pi}{4}) = A(\frac{\pi}{4}) = \frac{2}{3}$$

   et si $x = \pi$. Donc

   $$A(\pi) = A(\pi - \pi) = A(0) = \frac{1}{2}$$

2. *Montrons que : $A(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{1}{1 + \sin^2 x}$.*

   $$A(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{1}{\sin^2(\frac{\pi}{2} - x) + 2\cos^2(\frac{\pi}{2} - x)} = \frac{1}{\cos^2 x + 2\sin^2 x} = \frac{1}{(\cos^2 x + \sin^2 x) + \sin^2 x} = \frac{1}{1 + \sin^2 x}$$

3. *On suppose que $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Montrons que : $A(x) = \frac{1 + \tan^2 x}{2 + \tan^2 x}$.*

   $$\begin{aligned} A(x) &= \frac{1}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x(2 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x})} \\ &= \frac{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}}{(2 + \tan^2 x)} \\ &= \frac{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{(2 + \tan^2 x)} = \frac{1 + \tan^2 x}{2 + \tan^2 x} \end{aligned}$$

FIN

Pr : Yahya MATIOUI

etude – generale.com