2éme BAC PC-3
2020/2021

Lycée Al Kadi Ayad Salé
Matiére : Mathématiques
Professeur : Yahya MATIOUI

Devoir Surveillé N°1 (S2)
25/02/2021
Durée 1H

Problème d'analyse (20 POINTS)

Partie 01 ($5pts$)

On considère la fonction numérique g définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$g(x) = x - 2\ln(x) + 1$$

1. **a)** *Calculer* $g'(x)$ *pour tout* x *de* $]0,+\infty[$. ($1pt$)
   b) *Montrer que* g *est décroissante sur* $]0,2]$ *et croissante sur* $[2,+\infty[$. ($2pt$)
   c) *Calculer* $g(2)$, *puis déduire que :* $g(x) \geq 0$ *pour tout* x *de l'intervalle* $]0,+\infty[$.

Partie 02 (15 pts)

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par :

$$f(x) = x - (\ln x)^2 + \ln x$$

1. **a)** *Calculer* $\lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x)$, *et interpréter géométriquement le résultat obtenu.* ($1,5pts$)
   b) *Montrer que :* $\lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$. (*on pourra poser :* $X = \sqrt{x}$). (1 pt)
   c) *Déduire de ce qui précéde :* $\lim_{x\longrightarrow +\infty} f(x)$ *et* $\lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. ($1,5pts$)
   d) *Calculer* $\lim_{x\longrightarrow +\infty}(f(x)-x)$, *puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.*
   e) *Vérifier que :* $(\forall x \in]0,+\infty[)$; $f(x) - x = \ln(x)(1-\ln(x))$, *puis déduire que la courbe* (C_f) *est au dessous de la droite* $(\Delta) : y = x$ *sur les intervalles* $]0,1]$ *et* $[e,+\infty[$, *et au dessus sur l'intervalle* $[1,e]$.($2pts$)

2. **a)** *Montrer que pour tout* x *de* $]0,+\infty[$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x}$$

   puis montrer que f *est strictement croissante sur* $]0,+\infty[$. ($2pts$)
   b) *Dresser le tableau de variations de la fonction* f. ($1pt$)

3. *Montrer que l'équation* $f(x) = 0$ *admet une solution unique* α *dans* $]0,+\infty[$, *puis vérifier que* $0,5 \prec \alpha \prec 0,8$. ($2,5pts$)

4. *Déduire le signe de la fonction* f *sur l'intervalle* $]0,+\infty[$. ($1pt$)

5. *Tracer le droite* (Δ) *et la courbe* (C_f) *dans un repère orthonormé* $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$. ($1,5pt$)

6. *Montrer que la fonction* $H : x \longrightarrow x\ln x - x$ *est une primitive de la fonction* $h : x \longrightarrow \ln x$ *sur* $]0,+\infty[$. ($1pt$)

Pr : Yahya MATIOUI