

Lycée Al Kadi Ayad Salé
Matière : Mathématiques
Professeur : Yahya MATIOUI

Série d'exercices sur la fonction logarithme & suites numériques
31/01/2021

Problème d'analyse.

Partie 01

Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = 1 - x + x \ln x$$

- a)** Montrer que : $(\forall x \in]0, +\infty[) : g'(x) = \ln x$.
b) Montrer que g est décroissante sur $]0, 1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$.
- Calculer $g(1)$. En déduire que : $(\forall x \in]0, +\infty[) : g(x) \geq 0$.

Partie 02

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{2 \ln x}{x}$$

et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . (unité 1cm)

- Montrer que : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ et interpréter le résultat obtenu.
- Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$. En déduire la nature de la branche infinie à (C_f) au voisinage de $+\infty$.

a) Montrer que :

$$(\forall x \in]0, +\infty[) : f'(x) = \frac{2g(x)}{x^3}$$

b) Interpréter le résultat suivant : $f'(1) = 0$.

c) Montrer que f est croissante sur $]0, +\infty[$.

- Tracer (C_f) dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

(On admet que (C_f) admet deux points d'inflexion, un point d'abscisse 1 et l'autre d'abscisse compris entre 2 et 2,5 et on prends $f(0,3) = 0$).

Exercice 02

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1+4u_n}{7-2u_n} ; (\forall n \in \mathbb{N}). \end{cases}$$

1. Vérifier que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : 1 - u_{n+1} = \frac{6(1 - u_n)}{5 + 2(1 - u_n)}$$

puis montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 1 - u_n > 0$.

2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = \frac{2u_n - 1}{u_n - 1}$$

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{5}{6}$, puis calculer v_n en fonction de n .

b) Montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n = \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^n - 1}{\left(\frac{5}{6}\right)^n - 2}$$

Déduire la limite de la suite (u_n) .

FIN

www.etude – generale.com