

Cours sur les Suites Numériques.

Ce cours est destiné à tous les étudiants.

- ☞ ***de la Première année des classes préparatoires Scientifiques : MPSI-PCSI-TSI.***
- ☞ ***de la première année des classes préparatoires Commerces : ECS-ECT.***
- ☞ ***de la Première année licence mathématiques, faculté de science.***
- ☞ ***de la deuxième année licence physique, faculté de science.***
- ☞ ***L'école normale supérieure (ENS) Branche mathématiques.***

Ce cours est élaboré par le professeur de Mathématiques

Yahya MATIOUI

yahya.matioui@gmail.com

(+212) 6 24 72 00 97

Rabat le MAROC

10/02/2019

Table de matière

<i>Suite numérique</i>	Page 1.
<i>Limite finie et limite infini</i>	Page 2.
<i>Valeur d'adhérence d'une suite</i>	Page 7.
<i>Théorème de Bolzano-Weierstrass</i>	Page 8.
<i>Suite adjacentes</i>	Page 9.
<i>Théorème de Cauchy</i>	Page 10.
<i>Complétude de l'ensemble $\mathbb{R}$</i>	Page 11.
<i>Suite récurrentes</i>	Page 12.
<i>Théorème existence d'un point fixe lorsque $I = [a, b]$</i>	Page 12.
<i>Unicité du point fixe</i>	Page 12.
<i>Théorème du point fixe cas d'une fonction croissante</i>	Page 14.
<i>Théorème du point fixe cas d'une fonction décroissante</i>	Page 14.
<i>Suite arithmétique</i>	Page 14.
<i>Suite géométrique</i>	Page 15.
<i>Suite arithmético-géométrique</i>	Page 15.
<i>Suite récurrentes linéaires d'ordre 2</i>	Page 16.
<i>Suite de Fibonacci (Exemple)</i>	Page 18.
<i>Exercices</i>	Page 18.

Introduction

Vous savez déjà étudier une suite et calculer sa limite. La nouveauté réside dans la rigueur. La notion de convergence a une définition mathématique, que vous devez connaître et savoir appliquer. Ne vous contentez pas de comprendre les théorèmes, ils sont pour la plupart très naturels ; travaillez sur les preuves. L'idéal serait que vous soyez capables de les refaire.

1. Suite numérique.

Définition.

- Une suite est une application $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u(n)$ par u_n et on l'appelle n -ème terme ou terme général de la suite.

La suite est notée u ou plus souvent $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou simplement (u_n) . Il arrive fréquemment que l'on considère des suites à partir d'un certain entier naturel n_0 plus grand que 0 on note alors $(u_n)_{n \geq n_0}$.

Exemple.

- $(\sqrt{n})_{n \geq 0}$ est la suite de termes : 0,1,..

1.2. Limite finie, limite infini.

Définition

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ si :

pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel N tel que si $n > N$ alors $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} (n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon)$$

Remarque

On dit aussi que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers ℓ .

Autrement dit : u_n est proche d'aussi près que l'on veut de ℓ à partir d'un certain rang N .

Donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} (n \geq N \Rightarrow -\varepsilon \leq u_n - \ell \leq \varepsilon)$$

$$n \geq N \Rightarrow -\varepsilon + \ell \leq u_n \leq \ell + \varepsilon$$

$$n \geq N \Rightarrow u_n \in [-\varepsilon + \ell, \ell + \varepsilon]$$

1.3. Définition.

1. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ si :

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow u_n \geq A)$$

2. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ si :

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow u_n \leq -A)$$

Remarque

$$1. \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} -u_n = +\infty$$

1.4. Définition.

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente si elle admet une limite finie. Elle est divergente sinon (c'est-à-dire soit la suite tend vers $\pm\infty$, soit elle n'admet pas de limite).

1.5. Propriété :

Si une suite est convergente, sa limite est unique.

Preuve.

On procède par l'absurde.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente ayant deux limites $\ell \neq \ell'$.

Choisissons $\varepsilon > 0$. tel que $\varepsilon < \frac{|\ell - \ell'|}{2}$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} (n \geq N_1 \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon)$$

De même :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell'$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} (n \geq N_2 \Rightarrow |u_n - \ell'| \leq \varepsilon)$$

Notons $N = \max(N_1, N_2)$ on a alors pour ce N :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} (n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon \text{ et } |u_n - \ell'| \leq \varepsilon)$$

$$\text{Donc } |\ell - \ell'| = |\ell - u_N + u_N - \ell'| \leq |\ell - u_N| + |u_N - \ell'|$$

$$D'où : |\ell - \ell'| \leq 2\varepsilon \leq |\ell - \ell'|$$

Par suite : $|\ell - \ell'| < |\ell - \ell'|$ qui est impossible. ■

Remarque

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - \ell) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = |\ell|$$

1.6. Propriété.

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites convergentes.

$$1. \text{ Si } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell, \text{ ou } \ell \in \mathbb{R}, \text{ alors pour } \lambda \in \mathbb{R} \text{ on a } \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda u_n = \lambda \ell$$

$$2. \text{ Si } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell', \text{ ou } \ell, \ell' \in \mathbb{R}, \text{ alors}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = \ell + \ell'$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n) = \ell \times \ell'$$

$$3. \text{ Si } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \text{ ou } \ell \in \mathbb{R}^* \text{ alors } u_n \neq 0 \text{ pour } n \text{ assez grand et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{u_n} = \frac{\ell'}{\ell}$$

Preuve.

$$1. \text{ Si } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell, \text{ ou } \ell \in \mathbb{R},$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} (n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon)$$

Par suite :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} (n \geq N \Rightarrow |\lambda| |u_n - \ell| \leq |\lambda| \varepsilon)$$

$$\Rightarrow |\lambda u_n - \lambda \ell| \leq |\lambda| \varepsilon$$

On pose : $\varepsilon' = |\lambda| \varepsilon$

$$\Rightarrow |\lambda u_n - \lambda \ell| \leq |\lambda| \varepsilon'$$

Donc :

$$\forall \varepsilon' > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} (n \geq N \Rightarrow |\lambda u_n - \lambda \ell| \leq \varepsilon')$$

$$D'où : \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda u_n = \lambda \ell$$

$$2. \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell', \text{ ou } \ell, \ell' \in \mathbb{R}$$

Montrons que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n) = \ell \times \ell'$$

Soit $\varepsilon > 0$ existe-t-il $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$|u_n v_n - \ell \ell'| < \varepsilon$$

On remarque que

$$u_n v_n - \ell \ell' = u_n (v_n - \ell') + (u_n - \ell) \ell'$$

Ainsi

$$|u_n v_n - \ell \ell'| \leq |u_n| |v_n - \ell'| + |u_n - \ell| |\ell'|$$

- u_n Une suite convergente vers ℓ . En appliquant la définition de limite avec $\varepsilon = 1$,

On obtient qu'il existe un entier naturel N tel que $n \geq N_1$ on ait $|u_n - \ell| \leq 1$.

D'où :

$$|u_n| = |\ell + (u_n - \ell)| \leq |\ell| + |u_n - \ell|$$

$$\leq |\ell| + 1$$

- De même manière, puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell'$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_2: |v_n - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2(|\ell| + 1)}$$

- D'autre part : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_3 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_3: |u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2(|\ell'| + 1)}$$

On prend $N = \max(N_1, N_2, N_3)$

On a:

$$\begin{aligned} |u_n v_n - \ell \ell'| &\leq |u_n| |v_n - \ell'| + |u_n - \ell| |\ell'| \\ &\leq (|\ell| + 1) \cdot \frac{\varepsilon}{2(|\ell| + 1)} + \frac{\varepsilon}{2(|\ell'| + 1)} (|\ell'| + 1) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

On peut conclure : $|u_n v_n - \ell \ell'| \leq \varepsilon$

Autrement dit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} (n \geq N \Rightarrow |u_n v_n - \ell \ell'| \leq \varepsilon)$$

Donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = \ell \ell'$$

Montrons que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = \ell + \ell'$$

Soit $\varepsilon > 0$ existe-t-il $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$|u_n + v_n - (\ell + \ell')| < \varepsilon$$

On remarque que

$$u_n + v_n - (\ell + \ell') = u_n - \ell + v_n - \ell'$$

$$|u_n + v_n - (\ell + \ell')| < |u_n - \ell| + |v_n - \ell'|$$

On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$

C.-à-d. :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1, |u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

De même : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell'$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_2, |v_n - \ell'| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

On prend : $N = \max(N_1, N_2)$

$$|u_n + v_n - (\ell + \ell')| < |u_n - \ell| + |v_n - \ell'|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$< \varepsilon$$

On peut conclure : $|u_n + v_n - (\ell + \ell')| \leq \varepsilon$

Autrement dit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} (n \geq N \Rightarrow |u_n + v_n - (\ell + \ell')| \leq \varepsilon)$$

Donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n = \ell + \ell' \quad \blacksquare$$

1.7. Propriété.

Toute suite croissante majorée est convergente et sa limite est $\sup(u_n/n \in \mathbb{N})$

Preuve.

Notons $A = \{u_n/n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$.

Comme la suite u_n est majorée, disons par le réel M , l'ensemble A est majoré par M et de plus il est non vide.

Donc : A admet une borne supérieure : notons par $\ell = \sup(A)$.

Prouvons que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$$

Soit $\varepsilon > 0$. par la caractérisation de la borne sup, il existe un élément u_N de A tel que

$$\ell - \varepsilon < u_N < \ell$$

De plus :

$$\ell - \varepsilon < u_N < u_n \leq \ell \leq \ell + \varepsilon$$

Par suite :

$$\ell - \varepsilon < u_n \leq \ell + \varepsilon$$

D'où : $|u_n - \ell| < \varepsilon$ ■

Remarque :

Toute suite décroissante minorée converge vers sa borne inf.

2. Valeur d'adhérence d'une suite.

Définition.

On dit que α est une valeur d'adhérence de la suite (x_n) si :

$\forall \varepsilon > 0, \forall k \in \mathbb{N}, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que

$$|u_n - \alpha| < \varepsilon$$

2.1. Définition.

Une sous suite de la suite x_n est toute suite de la forme $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ ou $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante.

2.2. Propriété.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$,

Alors pour toute suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\varphi(n)} = \ell.$$

Preuve.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$,

D'après la définition de la limite on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

Comme l'application φ est strictement croissante, on montre facilement par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geq n$$

Alors ceci implique en particulier que si $n \geq N$,

Alors aussi $\varphi(n) \geq N$

Donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq \varphi(n)N \Rightarrow |u_{\varphi(n)} - \ell| \leq \varepsilon$$

La définition de la limite s'applique aussi à la suite extraite. ■

2.3. Corollaire.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite. Si elle admet une sous-suite divergente, ou bien si elle admet deux sous-suites convergentes vers des limites

Distincts, alors elle diverge.

2.4. Théorème de Bolzano-Weierstrass.

Toute suite u_n bornée admet une sous-suite convergente.

Preuve.

On procède par dichotomie.

L'ensemble des valeurs de la suite est par hypothèse contenu dans un intervalle $[a; b]$.

Posons $a_0 = a, b_0 = b, \varphi(0) = 0$.

Au moins l'un des deux intervalles

$\left[a_0, \frac{a_0+b_0}{2}\right]$ ou $\left[\frac{a_0+b_0}{2}, b_0\right]$ Contient u_n .

On note $[a_1, b_1]$ un tel intervalle, et on note $\varphi(1)$ un entier $\varphi(1) > \varphi(0)$ tel que $u_{\varphi(1)} \in [a_1, b_1]$.

En itérant cette construction, on construit pour tout entier n un intervalle $[a_n, b_n]$ de longueur $\frac{b-a}{2^n}$ et un entier $\varphi(n) \geq \varphi(n-1)$ tel que $u_{\varphi(n)} \in [a_n, b_n]$.

Notons que par construction la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Comme de plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{2^n} = 0$.

Les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes et donc convergentes vers une même limite ℓ . ■

2.5. Suites adjacentes

Définition

Les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont dites adjacentes si :

(u_n) est croissante et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante

Pour tout $n \geq 0$, on a $u_n \leq v_n$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$.

De plus

Si les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes elles convergent vers la même limite.

Preuve rapide !!

- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée par v_0 , donc elle converge vers une limite ℓ .

Car :

$$u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_n \leq \dots \leq v_n \leq \dots \leq v_2 \leq v_1 \leq v_0$$

- la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par u_0 , donc elle converge vers une limite ℓ' .

$$\text{Donc : } \ell' - \ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$$

$$\text{D'où : } \ell' = \ell$$

Preuve détaillé.

Tout d'abord remarquons que la suite $(v_n - u_n)$ est décroissante et converge vers 0.

La justification de la décroissance de la suite $(v_n - u_n)$.

Calculons la différence $(v_{n+1} - u_{n+1}) - (v_n - u_n)$:

$$(v_{n+1} - u_{n+1}) - (v_n - u_n) = (v_{n+1} - v_n) - (u_{n+1} - u_n)$$

On sait que $(v_{n+1} - v_n) < 0$ et $u_{n+1} - u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Par suite : $(v_{n+1} - v_n) < 0$ et $-(u_{n+1} - u_n) < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc : $(v_{n+1} - u_{n+1}) - (v_n - u_n) < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

D'où la suite est décroissante.

Puisque : $(v_n - u_n)$ converge vers 0 et décroissante alors elle est forcément minorée par 0.

Donc : $(v_n - u_n) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

C'est-à-dire : $v_n > u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a : $u_n < v_n < v_0$ (car la suite v_n est décroissante).

Donc : u_n est croissante et majorée par v_0 .

Par suite : u_n converge vers une limite ℓ ($\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$).

De même on a : $u_0 < u_n < v_n$ (car la suite u_n est croissante).

Donc : v_n est décroissante et minorée par u_0 .

Par suite : v_n converge vers une limite ℓ' ($\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell'$).

De plus : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = 0$

$$D'où : \underbrace{\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n}_{=\ell'} - \underbrace{\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n}_{=\ell} = 0$$

$$\text{Encore : } \ell' - \ell = 0$$

$$\text{Finalement : } \ell' = \ell.$$

2.6. Théorème de Cauchy.

On dit que (x_n) est de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon$$

Remarque :

Toute suite de Cauchy est bornée.

Preuve rapide !!

$$\text{Pour } \varepsilon = 1, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N : |x_n - x_m| < 1$$

$$\text{Alors : } \{x_n, n \geq N\} \subset]x_N - 1, x_N + 1[$$

$$\text{Ainsi : } S = \{x_n, n \geq N\} \subset [m, M]$$

$$D'où : m = \min(x_N - 1, \min(x_n, n \in \mathbb{N}))$$

$$\text{Et } M = \max(x_N + 1, \max(x_n, n \in \mathbb{N}))$$

2.7. Complétude de l'ensemble $\mathbb{R}$.

Théorème.

$\mathbb{R}$ est complet, c'est-à-dire toute suite réelle de Cauchy est convergente.

Preuve.

Soit x_n une suite de Cauchy, montrons que x_n est convergente.

Alors x_n est bornée d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass x_n admet une sous suite convergente.

Alors x_n converge vers ℓ .

Puisque x_n est de Cauchy alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N \Rightarrow |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Et comme ℓ est une limite de x_n .

Donc par $\frac{\varepsilon}{2}$ et N il existe $k \geq N$ tel que :

$$|x_k - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Ainsi pour $n \geq N$ on a :

$$\begin{aligned} |x_n - \ell| &\leq |x_n - x_k| + |x_k - \ell| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \blacksquare \end{aligned}$$

3. Suite récurrentes.

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Une suite récurrente est définie par son premier terme et une relation permettant de calculer les termes de proche en proche :

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour } n \geq 0 \\ u_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

3.1. Proposition.

Si f est une fonction continue et la suite récurrente (u_n) converge vers ℓ , alors ℓ est une solution de l'équation $f(\ell) = \ell$

Remarque :

Une valeur ℓ , vérifiant $f(\ell) = \ell$ est un **point fixe** de f la preuve est très simple.

Preuve.

Si $n \rightarrow +\infty$, $u_n \rightarrow \ell$ et donc aussi $u_{n+1} \rightarrow \ell$

Alors comme $u_n \rightarrow \ell$ et f est continue alors la suite $(f(u_n)) \rightarrow f(\ell)$.

La relation $u_{n+1} = f(u_n)$ devient à la limite (lorsque $n \rightarrow +\infty$): $\ell = f(\ell)$. ■

3.1. Théorème existence d'un point fixe lorsque $I = [a, b]$.

Soit g une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ et telle que $[a, b]$ sont stable par g alors la fonction g admet au moins un point fixe dans l'intervalle $[a, b]$.

$$\exists c \in [a, b] / g(c) = c$$

Preuve

En effet considérons la fonction f définie sur $[a, b]$ par $f(x) = x - g(x)$

f est alors continue sur $[a, b]$

On a par ailleurs :

$$f(a) = a - g(a) \leq 0$$

$$f(b) = b - g(b) \geq 0$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires on est sûr que l'équation $f(x)=0$ possède au moins une solution sur $[a, b]$

Il en de même de l'équation $g(x)=x$ et on peut affirmer que g possède au moins un point fixe. ■

3.2. Théorème (unicité du point fixe)

Soit I un intervalle fermé et soit $f: I \rightarrow I$ une fonction contractante. Alors f admet un point fixe unique.

Preuve.

Soit $x_0 \in I$ on considère la suite x_n définie par : $x_{n+1} = f(x_n)$

Puisque f est contractante, il existe $k \in]0,1]$ tel que :

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|, \forall x, y \in I$$

En particulier :

$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})|$$

$$\leq k|x_n - x_{n-1}|$$

$$\leq k^2|x_{n-1} - x_{n-2}|$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\leq k^n|x_1 - x_0|$$

Alors on peut écrire :

$$|u_{n+p} - u_n| \leq \sum_{i=0}^{p-1} |u_{n+i+1} - u_{n+i}|$$

On pose $N = n + i$

D'où :

$$|u_{n+p} - u_n| \leq \sum_{i=0}^{p-1} |u_{N+1} - u_N|$$

On sait que $|u_{N+1} - u_N| \leq k^n|x_1 - x_0|$

Donc :

$$\begin{aligned} |u_{n+p} - u_n| &\leq \sum_{i=0}^{p-1} k^{n+i} |x_1 - x_0| \\ &\leq k^n \sum_{i=0}^{p-1} k^i |x_1 - x_0| \end{aligned}$$

$$\leq k^n \frac{1 - k^p}{1 - k} |x_1 - x_0|$$

Puisque $k \in [0,1]$ alors $k^n \rightarrow 0$

Donc : $|u_{n+p} - u_n| \rightarrow 0$

Par suite la suite x_n est de Cauchy. Alors x_n converge dans $\mathbb{R}$ vers un point $x \in \overline{\mathbb{R}}$

Et comme I est fermé donc $\mathbb{R} = \overline{\mathbb{R}}$

Donc : $x \in I$

Comme f est continue, $f(x_n) \rightarrow f(x)$

C.-à-d. : $x_{n+1} \rightarrow f(x)$

Par suite : $x_{n+1} \rightarrow x$

D'où : $f(x) = x$ ■

3.3. Théorème.

Soit une fonction f dérivable dans un intervalle I , non nécessairement borné.

Si la dérivée f' vérifie $\max_{x \in I} |f'(x)| = k < 1$

Alors f est une application strictement contractante sur l'intervalle I .

Preuve (utilisation du théorème des accroissements finis)

3.4. Cas d'une fonction croissante.

Commençons par remarquer que pour une fonction croissante, le comportement de la suite (u_n) définie par récurrence est assez simple :

- Si $u_1 \geq u_0$ alors (u_n) est croissante.
- Si $u_0 \leq u_1$ alors (u_n) est décroissante.

3.5. Proposition.

Si $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ une fonction continue et croissante alors :

- quelque soit $u_0 \in [a, b]$
- (u_n) est monotone et converge vers $\ell \in [a, b]$

donc Vérifiant $f(\ell) = \ell$

Preuve (facile).

3.6. Cas d'une fonction décroissante.

Si $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ une fonction continue et décroissante. Soit $u_0 \in [a, b]$ et la suite récurrence (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$

- La sous-suite u_{2n} converge vers une limite ℓ vérifiant $f \circ f(\ell) = \ell$.
- La sous-suite u_{2n+1} converge vers une limite ℓ' vérifiant $f \circ f(\ell') = \ell'$.

3.7. Suites arithmétique.

Définition

Une suite est dite arithmétique si elle vérifie :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Où $r \in \mathbb{R}$

Le nombre r est dit le raison de la suite.

- Remarque.

Si (u_n) est arithmétique de raison r alors

$$u_n = u_0 + nr$$

On a bien que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ si $r > 0$

Si $r = 0$ la suite u_n est stationnaire donc convergente.

3.8. Suite géométriques.

Une suite (u_n) est dite géométrique si, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = qu_n$ avec $q \in \mathbb{R}$ avec le nombre q est dit la raison r de la suite.

- Remarque.

Si (u_n) est géométrique, alors $u_n = q^n u_0$.

3.9. Proposition

Une suite géométrique de raison q converge si et seulement si $|q| < 1$ ou $q=1$

- Si $q > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$
- $q \leq -1$ la suite n'a pas de limite.

Preuve.

On procède par contraposé.

Supposons que (u_n) est convergente et $|q| \geq 1$ et $q \neq 1$.

Si $q = -1$, alors u_n admet deux valeurs d'adhérences u_0 et $-u_0$

(deux limites différentes u_0 et $-u_0$)

Par suite la suite diverge.

Si $|q| > 1, \exists r > 0 \mid |q| > r + 1$

Donc : $|q^n| = |q|^n > (1 + r)^n > 1 + nr$

Ceci donne : $|u_n| > (1 + nr)u_0$

Ceci donne que u_n est diverge ce qui contredit que u_n converge.

3.10. Suites arithmético-géométrique.

Définition.

Une suite u_n est dit arithmético-géométrique s'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ $a \neq 0, a \neq 1$ tel que

$$u_{n+1} = au_n + b, \forall n \in \mathbb{N}$$

3.11. Proposition.

Si $u_{n+1} = au_n + b, \forall n \in \mathbb{N}$ $a \neq 0, a \neq 1$

Alors la suite $v_n = u_n - \frac{b}{1-a}$ est géométrique de raison a .

Preuve

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \frac{b}{1-a} \\ &= au_n + b - \frac{b}{1-a} \\ &= \frac{au_n - a^2u_n + b - ab - b}{1-a} \\ &= a\left(\frac{u_n - au_n - b}{1-a}\right) \\ &= a\left(u_n - \frac{b}{1-a}\right) \\ &= av_n \end{aligned}$$

3.12. Corollaire.

Si $|a| < 1$ la suite u_n converge et donc aussi v_n converge vers $\frac{b}{1-a}$

Si $|a| > 1$, alors v_n diverge et donc u_n aussi.

4. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

4.1. Définition 1.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite suite récurrente linéaire d'ordre 2 (S.R.L.O.2) s'il existe

$$(a, b) \in \mathbb{R}^2 / u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

4.2. Définition 2.

L'équation caractéristique d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ est l'équation :

$$r^2 - ar - b = 0$$

4.3. Proposition.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2 et $(E): r^2 - ar - b = 0$ l'équation caractéristique :

1. Si (E) admet deux racines réelles r_1 et r_2 alors :

$$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2 / u_n = Ar_1^n + Br_2^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

2. Si (E) admet une solution réelle double r , alors :

$$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2 / u_n = Ar^n + Bnr^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

3. Si (E) n'admet pas de solutions réelles (c.-à-d. $\Delta(E) < 0$) et si $z_1 = \rho \cdot e^{i\theta}$ et $z_2 = \rho \cdot e^{-i\theta}$ sont des solutions complexes alors :

$$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2 / u_n = \rho^n (A \cdot \cos(n\theta) + B \cdot \sin(n\theta)), \quad n \in \mathbb{N}$$

Preuve

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2 et $(E): r^2 - ar - b = 0$ l'équation caractéristique :

1. Si (E) admet deux racines réelles r_1 et r_2

On suppose qu'il existe A et B dans $\mathbb{R}^2$.

On montre que $u_n = Ar_1^n + Br_2^n, \quad n \in \mathbb{N}$

On a :

$$u_{n+2} = Ar_1^{n+2} + Br_2^{n+2} \text{ et } u_{n+1} = Ar_1^{n+1} + Br_2^{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Donc :

$$(\forall n \in \mathbb{N}): Ar_1^{n+2} + Br_2^{n+2} = a(Ar_1^{n+1} + Br_2^{n+1}) + b(Ar_1^n + Br_2^n)$$

$$\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}): Ar_1^{n+2} + Br_2^{n+2} = aAr_1^{n+1} + aBr_2^{n+1} + bAr_1^n + bBr_2^n$$

$$\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}): Ar_1^{n+2} - aAr_1^{n+1} - bAr_1^n = -Br_2^{n+2} + aBr_2^{n+1} + bBr_2^n$$

$$\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}): Ar_1^n(r_1^2 - ar_1 - b) = -Br_2^n(r_2^2 - ar_2 - b)$$

On sait que : (E) admet deux racines réelles r_1 et r_2 .

Ensuite : $r_1^2 - ar_1 - b = 0$ et $r_2^2 - ar_2 - b = 0$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}) : Ar_1^n(0) = -Br_2^n(0)$

Finalement :

$$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2 / u_n = Ar_1^n + Br_2^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

Même preuve pour 2,3.

Remarque :

- La situation 1 correspond à $\Delta(E) > 0$ c-à-d : $a^2 + 4b > 0$.
- La situation 2 correspond à $\Delta(E) = 0$ c-à-d : $a^2 + 4b = 0$.
- La situation 3 correspond à $\Delta(E) < 0$ c-à-d : $a^2 + 4b < 0$.
- Les nombres A et B sont déterminer par u_0 et u_1 c'est-à-dire

$$\begin{cases} u_0 = Ar_1^0 + Br_2^0 \\ u_1 = Ar_1^1 + Br_2^1 \end{cases}$$

4.4. Suite de Fibenacit :

Exemple

Suite de Fibenacit

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$$

L'équation caractéristique de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$r^2 - r - 1 = 0$$

$$\Delta = 1 + 4 = 5 > 0$$

Donc on a alors deux racines réelles :

$$r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Par suite : il existe A et B dans $\mathbb{R}^2$ tel que $u_n = Ar_1^n + Br_2^n$, $n \in \mathbb{N}$

$$\text{Donc : } B = \frac{1-r_1}{r_2-r_1} \quad \text{et} \quad A = \frac{r_2-1}{r_2-r_1}$$

Donc :

$$u_n = \left(\frac{r_2 - 1}{r_2 - r_1} \right) \cdot r_1^n + \left(\frac{1 - r_1}{r_2 - r_1} \right) r_2^n$$

5. Exercices.

Exercice 1.

1. a. Montrer que $x \rightarrow sh(x)$ est une bijection d'une partie et trouver sa bijection réciproque on le note par f .
- b. Montrer que $x \rightarrow ch(x)$ induit une bijection d'une partie de $\mathbb{R}$ dans une autre partie et trouver sa bijection réciproque on le note par g .

2. a. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$ch(f(x)) = \sqrt{x^2 + 1}.$$

- b. Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$:

$$sh(g(x)) = \sqrt{x^2 - 1}$$

- c. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de sa dérivée.
- d. Justifier que g est dérivable sur $]1, +\infty[$ et donner une expression de sa dérivée.
- e. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

- f. Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$:

$$g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

Correction

- a) Montrons que $x \rightarrow sh(x)$ est une bijection d'une partie de $\mathbb{R}$ dans une autre partie.

La fonction $x \rightarrow sh(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme la composée de deux fonctions continues.

$x \rightarrow sh \circ v$ (avec $v(x) = x$)

De plus : la fonction $u: x \rightarrow sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ est dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (à vérifier)

Donc : la fonction f est une bijection d'une partie de $\mathbb{R}$ vers une autre partie J tel que : $u(\mathbb{R}) = u(]-\infty, +\infty[) =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R} = J$.

Puisque u est bijective alors elle admet une fonction réciproque $x \rightarrow f(x) = u^{-1}(x)$.

$$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, u(x) = y$$

$$\Leftrightarrow sh(x) = y$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{2} = y$$

$$\Leftrightarrow e^x - e^{-x} = 2y$$

$$\Leftrightarrow e^x - \frac{1}{e^x} = 2y$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} - 1 = 2ye^x$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} - 1 - 2ye^x = 0$$

$$\Leftrightarrow (e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0$$

On pose : $X = e^x$

On aurait l'équation suivante : (E):

$$(X)^2 - 2yX - 1 = 0$$

Par suite : l'équation (E) est une équation de deuxième degré pour calculer ses racines déterminons le discriminant Δ .

$$\Delta = (-2y)^2 - 4(1)(-1)$$

$$= (-2y)^2 - 4(1)(-1)$$

$$= 4y^2 + 4$$

$$= 4(y^2 + 1)$$

Remarquons que $\Delta > 0$, alors l'équation admet deux solutions distinctes x_1 et x_2

$$X_1 = \frac{2y + \sqrt{4(y^2 + 1)}}{2}$$

$$\Leftrightarrow X_1 = \frac{2y + 2\sqrt{y^2 + 1}}{2}$$

$$\Leftrightarrow X_1 = y + \sqrt{y^2 + 1} > 0$$

Remarquons que $X_1 = y + \sqrt{y^2 + 1} > 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

$$D'où : $X_1 = e^{x_1} = y + \sqrt{y^2 + 1} \Leftrightarrow x_1 = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$$$

$$\text{Et : } X_2 = y - \sqrt{y^2 + 1}$$

Remarquons que $X_2 = y - \sqrt{y^2 + 1} < 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

Donc : $X_2 = e^{x_2}$, x_2 n'existe pas !

On peut écrire :

$$\mathbb{R} \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow u^{-1}(x) = f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

Remarque :

La fonction réciproque de la fonction $x \rightarrow \text{sh}(x)$ est notée $x \rightarrow \text{argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

b. Montrons que la fonction $x \rightarrow \text{ch}(x)$ est une bijection d'une partie de $\mathbb{R}$ dans une autre partie

La fonction $x \rightarrow \text{ch}(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme la composée de deux fonctions continues.

$x \rightarrow \text{ch} \circ v$ (avec $v(x) = x$)

De plus : la fonction $u: x \rightarrow \text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ est dérivable

Donc :

$$u'(x) = (\text{ch}(x))'$$

$$= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)'$$

$$= \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}$$

$$= \frac{e^{2x} - 1}{2e^x}$$

Si $x > 0$ alors : $u'(x) > 0$ et si $x < 0$ alors $u'(x) < 0$.

Par suite : la fonction $x \rightarrow u(x)$ est croissante sur $[0, +\infty[$ et décroissante sur $[-\infty, 0[$.

La fonction est strictement monotone sur $[0, +\infty[$ et $[-\infty, 0[$.

Donc : la fonction f est une bijection d'une partie de $[0, +\infty[$ vers une autre partie J tel que :

$$u([0, +\infty[) = u(-\infty, +\infty) = [1, +\infty[= J.$$

Puisque v est bijective alors elle admet une fonction réciproque $x \rightarrow g(x) = v^{-1}(x)$.

$$\forall y \in [1, +\infty[, \exists x \in [0, +\infty[, u(x) = y$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^x + e^{-x}}{2} = y$$

$$\Leftrightarrow e^x + e^{-x} = 2y$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} + 1 = 2ye^x$$

$$\Leftrightarrow [(e)^x]^2 + 1 - 2ye^x = 0$$

On pose : $X = e^x$

On aurait l'équation suivante : (E):

$$(X)^2 - 2yX + 1 = 0$$

Par suite : l'équation (E) est une équation de deuxième degrés pour calculer ses racines déterminons le discriminant Δ .

$$\Delta = (-2y)^2 - 4(1)(+1)$$

$$= (-2y)^2 - 4(1)(+1)$$

$$= 4y^2 - 4$$

$$= 4(y^2 - 1)$$

Remarquons que si $y > 1$ alors $\Delta > 0$, ce qui donne que l'équation admet deux solutions distinctes X_1 et X_2

$$X_1 = \frac{2y + \sqrt{4(y^2 - 1)}}{2}$$

$$\Leftrightarrow X_1 = \frac{2y + 2\sqrt{y^2 - 1}}{2}$$

$$\Leftrightarrow X_1 = y + \sqrt{y^2 - 1} > 0$$

Remarquons que $X_1 = y + \sqrt{y^2 - 1} > 0$ pour tout $y \in [1, +\infty[$.

$$D'où : X_1 = e^{x_1} = y + \sqrt{y^2 - 1} \Leftrightarrow x_1 = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$$

$$Et : X_2 = y - \sqrt{y^2 - 1}$$

Remarquons que $X_2 = y - \sqrt{y^2 - 1} < 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

Donc : $X_2 = e^{x_2}$, x_2 n'existe pas !

On peut écrire :

$$[1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$$

$$x \rightarrow v^{-1}(x) = g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

2 Montons que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $ch(f(x)) = \sqrt{x^2 + 1}$.

On a : pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ et $ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

Or on sait que $ch^2(x) - sh^2(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Donc : $ch^2(x) = sh^2(x) + 1$

Par suite : $ch(x) = \sqrt{sh^2(x) + 1}$

En particulier pour $x = f(x)$,

On aurait

$$\begin{aligned} ch(f(x)) &= \sqrt{sh^2(f(x)) + 1} \\ &= \sqrt{sh^2(\operatorname{argsh}(x)) + 1} \end{aligned}$$

$$ch(f(x)) = \sqrt{x^2 + 1}$$

Par conséquent pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$ch(f(x)) = \sqrt{x^2 + 1}$$

b. Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $sh(g(x)) = \sqrt{x^2 - 1}$.

On a : pour tout $x \in \mathbb{R}$ $g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ et $ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

Or on sait que $ch^2(x) - sh^2(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Donc : $sh^2(x) = ch^2(x) - 1$

Par suite : $sh(x) = \sqrt{ch^2(x) - 1}$

En particulier pour $x = g(x)$,

On aurait

$$\begin{aligned} sh(g(x)) &= \sqrt{ch^2(g(x)) - 1} \\ &= \sqrt{ch^2(\operatorname{argch}(x)) - 1} \end{aligned}$$

$$sh(g(x)) = \sqrt{x^2 - 1}$$

Par conséquent pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$sh(g(x)) = \sqrt{x^2 - 1}$$

c. Justifiant que f est dérivable sur $\mathbb{R}$:

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme la somme et la composée des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$x \xrightarrow{u} x \text{ et } x \rightarrow \sqrt{v(x)} \text{ avec } x \rightarrow x^2 + 1$$

On peut le voir autrement puisque la fonction $x \rightarrow sh(x)$ est dérivable alors sa fonction réciproque l'est.

Donc :

$$\begin{aligned}(f(x))' &= \frac{1}{ch(f(x))} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\end{aligned}$$

$$\text{Donc : pour tout } x \in \mathbb{R} \quad (f(x))' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

De même pour la fonction g elle est dérivable sur $]1, +\infty[$ puisque la fonction $x \rightarrow ch(x)$ l'est.

Par suite :

$$\begin{aligned}(g(x))' &= \frac{1}{sh(g(x))} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\end{aligned}$$

Donc : pour tout $x \in]1, +\infty[$

$$(g(x))' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

Exercice 2.

Etudier la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = e^{u_n} - 1.$$

Correction.

On étudie la suite (u_n) définie par : $u_0 \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = e^{u_n} - 1.$

On distingue deux cas si $u_0 \in \mathbb{R}^+$ ou $u_0 \in \mathbb{R}^-$

Si $u_0 \in \mathbb{R}^+$.

- Montrons par récurrence que $u_n \geq 0$.

* l'inégalité est vraie pour $u_0 \in \mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$.

* on suppose que $u_n \geq 0$.

* montrons que $u_{n+1} \geq 0$.

On a : $u_n \geq 0$ et la fonction $x \rightarrow e^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

Donc : $e^{u_n} \geq 1$

Par suite : $u_{n+1} \geq 0$.

D'après le principe de récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n \geq 0$.

On a un résultat similaire si $u_0 \in \mathbb{R}^-$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n \leq 0$.

- Déterminons la monotonie de la suite u_n sur $\mathbb{R}$.

$$u_{n+1} - u_n = e^{u_n} - 1 - u_n$$

$$= e^{u_n} - u_n - 1$$

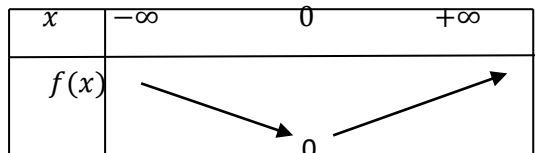
Considérons la fonction f définie par :

$$f(x) = e^x - x - 1$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Donc : $f'(x) = e^x - 1$

Par suite : la fonction f est décroissante sur $]-\infty, 0]$ puis croissante sur $[0, +\infty[$.



La fonction f admet une valeur minimale en point d'abscisses 0 .

On peut conclure que $f(x) \geq 0$.

Donc : $u_{n+1} - u_n \geq 0$

D'où : la suite u_n est croissante pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Si $u_0 \in \mathbb{R}^+$

On aurait $u_n \geq 0$ c'est-à-dire la suite u_n est minorée par 0 et puisque u_n est croissante on peut affirmer que la suite u_n est diverge.

Si $u_0 \in \mathbb{R}^-$

On aurait $u_n \leq 0$ c'est-à-dire la suite u_n est majorée par 0 et puisque u_n est croissante on peut affirmer que la suite u_n est converge.

Conclusion.

- u_n est converge si et seulement si $u_0 \in \mathbb{R}^-$.
 - u_n est diverge si et seulement si $u_0 \in \mathbb{R}^+$.
-

Référence

- ☞ *Arnaud Bodin, Niels Borne, Laura Desideri et Benjamin Boutin sur Livre d'analyse de la première année cycle licence fondamentale.*
- ☞ *Examen final 2016/2017 ENSA Kenitra –MAROC.*

Ce cours est élaboré par le professeur de Mathématiques

Yahya MATIOUI

Bonne Chance à tous.

yahya.matioui@gmail.com

(+212) 6 24 72 00 97

Rabat le MAROC

10/02/2019