Correction du devoir surveillé

Exercice 1 .

On considère dans $\mathbb{R}$ *les sous-ensembles suivants :*

$$A =]-\infty, 3] \quad , \quad B =]-2, 7] \quad et \quad C =]-5, +\infty[$$

1. ■ *On cherche* $A \setminus B$ *c'est-à-dire les éléments de* $\mathbb{R}$ *qui appartiennent à* A *et n'appartiennent pas à* B.

   Méthode 01

$$A \setminus B =]-\infty, 3] \ \setminus \ ]-2, 7] =]-\infty, -2]$$

   Méthode 02

$$\begin{aligned} A \setminus B &= A \cap \complement_{\mathbb{R}}^{B} \\ &=]-\infty, 3] \cap \complement_{\mathbb{R}}^{]-2,7]} \\ &=]-\infty, 3] \cap (]-\infty, -2] \cup]7, +\infty[) \\ &= (]-\infty, 3] \cap]-\infty, -2]) \cup (]-\infty, 3] \cap]7, +\infty[) \\ &=]-\infty, -2] \cup \varnothing \\ &=]-\infty, -2] \end{aligned}$$

   ■ .*On cherche* $B \setminus A$ *c'est-à-dire les éléments de* $\mathbb{R}$ *qui appartiennent à* B *et n'appartiennent pas à* A.

   Méthode 01

$$B \setminus A =]-2, 7] \ \setminus \ ]-\infty, 3] =]3, 7]$$

   Méthode 02

$$\begin{aligned} B \setminus A &= B \cap \complement_{\mathbb{R}}^{A} \\ &=]-2, 7] \cap \complement_{\mathbb{R}}^{]-\infty,3]} \\ &=]-2, 7] \cap]3, +\infty[\\ &=]3, 7] \end{aligned}$$

   ■ $A \Delta B$

$$\begin{aligned} A \Delta B &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \\ &=]-\infty, -2] \cup]3, 7] \end{aligned}$$

2. *On détermine :*

■ $A \cap C$.

$$\begin{aligned} A \cap C &= \left]-\infty, 3\right] \cap \left]-5, +\infty\right[\\ &= \left]-5, 3\right] \end{aligned}$$

■ $A \cup C$.

$$\begin{aligned} A \cup C &= \left]-\infty, 3\right] \cup \left]-5, +\infty\right[\\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

■ $A \Delta C$.

$$\begin{aligned} A \Delta C &= (A \cup C) \ \setminus \ (A \cap C) \\ &= \mathbb{R} \setminus \ \left]-5, 3\right] \\ &= \left]-\infty, -5\right] \cup \left]3, +\infty\right[\end{aligned}$$

3. *On détermine :* $\overline{(A \setminus B) \cap C}$.

$$\begin{aligned} \overline{(A \setminus B) \cap C} &= \overline{\left]-\infty, -2\right] \cap \left]-5, +\infty\right[} \\ &= \overline{\left]-5, -2\right[} \\ &= \complement_{\mathbb{R}}^{\left]-5,-2\right[} \\ &= \left]-\infty, -5\right] \cup \left[-2, +\infty\right[\end{aligned}$$

Exercice 2 .

On considère les ensembles :

$$E = \left\{ \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} / \ k \in \mathbb{Z} \right\} \quad et \quad F = \left\{ \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{6} / \ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

1. *On détermine* $E \cap \left[\frac{-\pi}{2}, \pi\right]$.

   Soit $x \in E \cap \left[\frac{-\pi}{2}, \pi\right]$, *alors* $x \in E$ *et* $x \in \left[\frac{-\pi}{2}, \pi\right]$.

   Comme $x \in E$, *alors :*

$$\exists k \in \mathbb{Z} / \quad x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$$

   et puisque : $x \in \left[\frac{-\pi}{2}, \pi\right]$, *donc :*

$$\begin{aligned} \frac{-\pi}{2} \quad &\leq \quad \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \leq \pi \\ &\iff \quad \frac{-1}{2} \leq \frac{1}{6} + \frac{k}{3} \leq 1 \\ &\iff \quad \frac{-1}{2} - \frac{1}{6} \leq \frac{k}{3} \leq 1 - \frac{1}{6} \\ &\iff \quad -\frac{2}{3} \leq \frac{k}{3} \leq \frac{5}{6} \\ &\iff \quad -2 \leq k \leq \frac{5}{2} \end{aligned}$$

   comme $k \in \mathbb{Z}$ *alors* $k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

- Si $k=-2,$ *alors* : $x=-\frac{\pi}{2}$.
- Si $k=-1,$ *alors* : $x=\frac{-\pi}{6}$.
- Si $k=0,$ *alors* : $x=\frac{\pi}{6}$.
- Si $k=1,$ *alors* : $x=\frac{\pi}{2}$.
- Si $k=2,$ *alors* : $x=\frac{5\pi}{6}$.

Donc

$$E\cap\left[\frac{-\pi}{2},\pi\right]=\left\{\frac{-\pi}{2},\frac{-\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}\right\}$$

2. *Montrons que* : $E\subset F$.

   Soit $x\in E$, *alors il existe* $k\in\mathbb{Z}$ *tel que* : $x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}$.

   Donc

$$\begin{aligned} x &= \frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3} \\ &= \frac{2\pi-\pi}{6}+\frac{k\pi}{3} \\ &= \frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3} \\ &= \frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\left(\underbrace{-1+2k}_{\in\mathbb{Z}}\right) \end{aligned}$$

   Ceci signifie que : $x\in F$. *Donc* $E\subset F$.

3. **a)** *Montrons que* : $\frac{\pi}{3}\notin E$.

   On suppose par l'absurde que : $\frac{\pi}{3}\in E$. *Alors il existe* $k\in\mathbb{Z}$ *tel que* : $\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}$.
   Donc

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{3} &= \frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3} \\ &\Longleftrightarrow \frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{k\pi}{3} \\ &\Longleftrightarrow \frac{\pi}{6}=\frac{k\pi}{3} \\ &\Longleftrightarrow k=\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z} \end{aligned}$$

   Ce qui est absurde. Ceci signifie que : $\frac{\pi}{3}\notin E$.

   b) *On a* : $\frac{\pi}{3}\in F$. *Car* $\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+\frac{0\times\pi}{6}$. *Et* $\frac{\pi}{3}\notin E$ (*question précédente*) . *Ceci signifie que l'inclusion* $F\subset E$ *n'est pas satisfaite.*

Exercice 3 .

1. *On détermine en extension* :

- $F=\left\{x\in\mathbb{Z}\ /\ \frac{2x+1}{x+1}\in\mathbb{Z}\right\}$.
  Soit $x\in\mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}
x\ \epsilon\ F &\iff \frac{2x+1}{x+1}\in\mathbb{Z}\\
&\iff \frac{2(x+1)-1}{x+1}\in\mathbb{Z}\\
&\iff 2-\frac{1}{x+1}\in\mathbb{Z}\\
&\iff \frac{-1}{x+1}\in\mathbb{Z}\\
&\iff x+1\ \textit{divise}\ -1\\
&\iff x+1=-1\quad \textit{ou}\quad x+1=1\\
&\iff x=-2\ \textit{ou}\ x=0\\
&\iff x\in\{0,-2\}
\end{aligned}$$

Donc

$$F=\{-2,0\}$$

- $C=\left\{(x,y)\in(\mathbb{Z}^*)^2\ /\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{5}\right\}$.
  Soit $(x,y)\in(\mathbb{Z}^*)^2$.

$$\begin{aligned}
(x,y)\ \epsilon\ C &\iff \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{5}\\
&\iff \frac{y+x}{xy}=\frac{1}{5}\\
&\iff 5(x+y)=xy\\
&\iff 5x+5y-xy=0\\
&\iff x(5-y)+5y=0\\
&\iff x(5-y)+5y-25=-25\\
&\iff x(5-y)-5(5-y)=-25\\
&\iff (5-y)(x-5)=-25\\
&\iff \begin{cases}5-y=1\\x-5=-25\end{cases}\ \textit{ou}\ \begin{cases}5-y=-25\\x-5=1\end{cases}\ \textit{ou}\ \begin{cases}5-y=5\\x-5=-5\end{cases}\\
&\qquad \textit{ou}\ \begin{cases}5-y=-5\\x-5=5\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}y=4\\x=-20\end{cases}\ \textit{ou}\ \begin{cases}y=30\\x=6\end{cases}\ \textit{ou}\ \begin{cases}y=0\\x=0\end{cases}\ \textit{ou}\ \begin{cases}y=10\\x=10\end{cases}
\end{aligned}$$

Comme $(x,y)\in(\mathbb{Z}^*)^2$ *alors le couple* $(0,0)$ *ne convient pas. Donc*

$$C=\{(-20,4);(6,30);(10,10)\}$$

2. *On considère les ensembles :*

$$B=\{x\in\mathbb{Z}\ /\ |x|<3\},\quad E=\{x\in\mathbb{Z}\ /\ -5<x\le 5\}\quad \textit{et}\quad A=E\cap\mathbb{N}^*$$

■ *On détermine en extension* $A \cap B$.

On a

$$\begin{aligned} B &= \{x \in \mathbb{Z} \ / \ |x| < 3\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} \ / \ -3 < x < 3\} \\ &= \{-2, -1, 0, 1, 2\} \end{aligned}$$

d'autre part, on a

$$E = \{x \in \mathbb{Z} \ / \ -5 < x \leq 5\} = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

donc

$$A = E \cap \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

ensuite

$$A \cap B = \{1, 2\}$$

■ *On détermine :* $\complement_E^{A \cup B}$.

$$\complement_E^{A \cup B} = \{x \in E \ / \ x \notin A \cup B\}$$

comme : $A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ *, d'où*

$$\complement_E^{A \cup B} = \{-4, -3\}$$

■ *On détermine :* $A \setminus B$.

$$A \setminus B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \ \setminus \ \{-2, -1, 0, 1, 2\} = \{3, 4, 5\}$$

■ *On détermine :* $(A \cap B) \cap \complement_E^{A \cap B}$:

$$(A \cap B) \cap \complement_E^{A \cap B} = \{1, 2\} \cap \{-4, -3, -2, -1, 0, 3, 4, 5\} = \varnothing$$

Exercice 4 .

Soient A *et* B *deux parties de* E.

1. *Montrons que :* $\overline{A} \subset \overline{B} \iff (A \setminus B) \cup B = A$.

   Démontrons le double implications.

   $\Longrightarrow$) *On suppose que :* $\overline{A} \subset \overline{B}$ *et on montre que :* $(A \setminus B) \cup B = A$.
   On a : $\overline{A} \subset \overline{B}$, *alors :* $B \subset A$. *Donc*

$$\begin{aligned} (A \setminus B) \cup B &= \left(A \cap \overline{B}\right) \cup B \\ &= (A \cup B) \cap \left(\overline{B} \cup B\right) \\ &= (A \cup B) \cap E \\ &= A \end{aligned}$$

($\Longleftarrow$ *On suppose que :* $(A \setminus B) \cup B = A$. *et on montre que :* $\overline{A} \subset \overline{B}$.

On a : $B \subset (A \setminus B) \cup B$, *donc :* $B \subset A$. *Ceci signifie que :* $\overline{A} \subset \overline{B}$.

2. *Montrons que :* $A = B \iff (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \varnothing$.

   Démontrons le double implications.

$\Longrightarrow$) *On suppose que* $A = B$, *et on montre que :* $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \varnothing$.

$$\begin{aligned}(A \setminus B) \cup (B \setminus A) &= (A \setminus A) \cup (A \setminus A)\\ &= \varnothing \cup \varnothing\\ &= \varnothing\end{aligned}$$

($\Longleftarrow$ *On suppose que* $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \varnothing$, *et on montre que :* $A = B$.

On a : $(A \setminus B) \subset (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ *et* $(B \setminus A) \subset (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Donc : $(A \setminus B) = \varnothing$ *et* $(B \setminus A) = \varnothing$. *D'où*

$$\left(A \cap \overline{B}\right) \cup B = B \quad et \quad \left(B \cap \overline{A}\right) \cup A = A$$

C'est-à-dire :

$$(A \cup B) \cap \left(\overline{B} \cup B\right) = B \quad et \quad (B \cup A) \cap \left(\overline{A} \cup A\right) = A$$

donc

$$A \cup B = B \quad et \quad B \cup A = A$$

Ceci signifie que :

$$A \subset B \quad et \quad B \subset A$$

d'où

$$A = B$$

3. *Montrons que :* $A = \varnothing \iff \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right) = B$.

   Démontrons le double implications.

$\Longrightarrow$) *On suppose que* $A = \varnothing$, *et on montre que :* $\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right) = B$.

$$\begin{aligned}\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right) &= \left(\varnothing \cap \overline{B}\right) \cup (\overline{\varnothing} \cap B)\\ &= \varnothing \cup B\\ &= B\end{aligned}$$

($\Longleftarrow$ *On suppose que* $\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right) = B$, *et on montre que :* $A = \varnothing$.

On suppose par l'absurde que : $A \neq \varnothing$, *donc il existe* x *dans* E *tel que :* $x \in A$.

- Si $x \in B$, *alors :* $x \in \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)$, *c'est-à-dire :* $x \in \left(A \cap \overline{B}\right)$ *ou* $x \in \left(\overline{A} \cap B\right)$.

  Ceci signifie que : $x \in A \cap \overline{B}$. *Car :* $\overline{A} \cap B \subset \overline{A}$. *Donc :* $x \in \overline{B}$ *c'est-à-dire :* $x \notin B$. *Ce qui est absurde.*

■ Si $x \notin B$, *c'est-à-dire* : $x \in \overline{B}$. *donc* : $x \in A \cap \overline{B}$, *c'est-à-dire* : $x \in \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)$.
Ceci signifie que : $x \in B$. *Ce qui est absurde.*

Donc l'hypothèse de départ est fausse alors $A = \varnothing$.

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude – generale.com