Les fonctions numériques

Généralités sur les fonctions numériques (Rappelle et complément)

Définition générale d'une fonction

Définition 1 • *Une fonction est une relation qui permet d'associer à un élément x,* ***au plus*** *un autre élément appelé* ***image****. On note cette fonction par :* $f, g, h, ...$

• *On représente la fonction f par :*

$$\begin{array}{llll} f & E & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

* *L'image d'un élément x par f sera notée $f(x)$.*

* *L'ensemble E appelé* ***ensemble de départ.***

* *L'ensemble F appelé* ***ensemble d'arrivé.***

Remarque 2 *Il faut faire la différence entre la fonction f qui représente une relation et $f(x)$ qui représente l'image de x par f qui est un élément.*

Exemple 3 *Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :*

$$\begin{array}{llll} f & [-1,4[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2+2x-3 \end{array}$$

On a : $f(1) = 1^2 + 2 \times 1 - 3 = 0$. C'est-à-dire 0 est l'image de 1 par la fonction f.

L'ensemble de définition d'une fonction

Définition 4 *Soit f la fonction numérique de la variable réelle x.*

L'ensemble de définition de la fonction f est l'ensemble des nombres réels x qui possèdent une image par cette fonction. L'ensemble de définition de la fonction f est noté : D_f tel que :

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / \quad f(x) \in \mathbb{R}\}$$

Exemple 5 *Déterminer l'ensemble de définition des fonctions numériques suivantes f, h, g et M telles que :*

$$f(x) = \frac{2x}{x-1}\ , \quad h(x) = \sqrt{x-1}\ , \ g(x) = \frac{x^2+4}{x^2-1} \quad et \quad M(x) = x^3 + 5x - 1$$

- *Pour la fonction f :*

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R}/ \ \ x-1 \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/ \ \ x \neq 1\} \\ &=]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[\end{aligned}$$

- *Pour la fonction h :*

$$\begin{aligned} D_h &= \{x \in \mathbb{R}/ \ \ x-1 \geq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/ \ \ x \geq 1\} \\ &= [1, +\infty[\end{aligned}$$

- *Pour la fonction g :*

$$D_g = \left\{x \in \mathbb{R}/ \ \ x^2-1 \neq 0\right\}$$

On résout l'équation : $x^2-1=0$.

$$x^2-1=0 \iff (x-1)(x+1)=0 \iff x=1 \ \textit{ou} \ x=-1$$

Donc

$$\begin{aligned} D_g &= \{x \in \mathbb{R}/ \ x \neq 1 \ \textit{et} \ x \neq -1\} \\ &= \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \\ &=]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[\end{aligned}$$

- *Pour la fonction M :*

  M est une fonction polynomiale. Donc : $D_M = \mathbb{R}$.

Égalité de deux fonctions

Définition 6 *Soient f et g deux fonctions numériques définies respectivement sur D_f et D_g. Les deux fonctions f et g sont égales si, et seulement si :*

- *Ces deux fonctions ont même ensemble de définition. C'est-à-dire : $D_f = D_g$.*

- *Pour tout réel x de l'ensemble de définition D_f, on a : $f(x) = g(x)$.*

Remarque 7 *En particulier deux fonctions sont égales si, et seulement si, leurs représentations graphiques relativement à un repère donné sont confondues.*

Exemple 8 *On considère les deux fonctions numériques f et g définies par : $f(x) = |x+2|$ et $g(x) = \sqrt{x^2+4x+4}$*

Est-ce-que les fonctions f et g sont égales ?

Graphe d'une fonction

Définition 9 *Soit f la fonction numérique définie sur D_f. ($D_f \subset \mathbb{R}$)*

La représentation graphique ou courbe de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est l'ensemble des points $M(x, f(x))$ noté (C_f) tel que $x \in D_f$. Autrement dit :

$$(C_f) = \{M(x, f(x)) / \ x \in D_f\}$$

Fonction paire - Fonction impaire - Fonction périodique

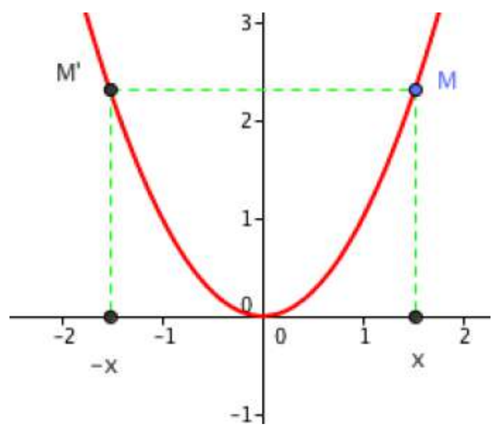
Fonction paire.

Définition 10 *Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur D_f. La fonction f est dite paire si, et seulement si :*

- *Pour tout $x \in D_f$,on a : $-x \in D_f$.*
- *Pour tout $x \in D_f$, on a : $f(-x) = f(x)$.*

Interprétation géométrique de la fonction paire.

Propriété 11 *Soit f une fonction numérique de la variable réelle x et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. La fonction f est paire si, et seulement si sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.*



Remarque 12 *Pour étudier une fonction paire f, il suffit de l'étudier sur : $E = D_f \cap [0, +\infty[$.*

Exemple 13 *Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = x^2 + |x|$.*
et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. *Montrer que la fonction f est paire, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.*

   - *f la fonction numérique définie par : $f(x) = x^2 + |x|$. Donc : $D_f = \mathbb{R}$.*
     Pour tout $x \in D_f$, on a : $-x \in D_f$. (1).
     Soit $x \in D_f$. Calculons $f(-x)$.

     $$f(-x) = (-x)^2 + |-x| = x^2 + |x| = f(x). \quad (2)$$

     Donc, d'après (1) et (2), on déduit que la fonction f est paire.

- *La courbe (C_f) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.*

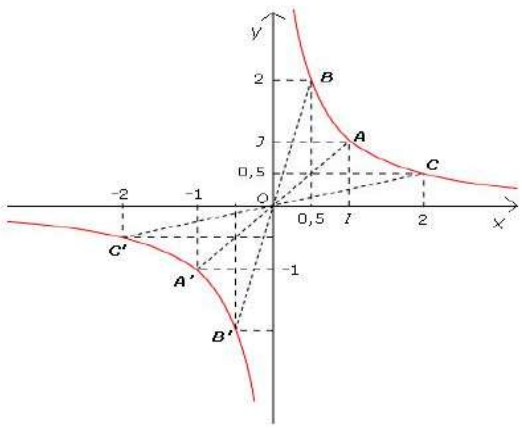
Fonction impaire

Définition 14 *Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur D_f. La fonction f est dite impaire si, et seulement si :*

- *Pour tout $x \in D_f$, on a : $-x \in D_f$.*
- *Pour tout $x \in D_f$, on a : $f(-x) = -f(x)$.*

Interprétation géométrique de la fonction impaire

Propriété 15 *Soit f une fonction numérique de la variable réelle x et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. La fonction f est impaire si, et seulement si sa courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère.*



Exemple 16 *Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$. et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.*

1. *Montrer que la fonction f est impaire, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.*

   - *L'ensemble de définition de la fonction f est : $D_f = \mathbb{R}^*$.*
     Pour tout x de D_f, on a : $-x \in D_f$. (1).
     Soit $x \in D_f$. Calculons $f(-x)$:

     $$f(-x) = \frac{(-x)^2+1}{-x} = -\frac{x^2+1}{x} = -f(x). \qquad (2)$$

     D'après (1) et (2), on déduit que f est une fonction impaire.
   - *La courbe (C_f) est symétrique par rapport à l'origine du repère.*

Fonction périodique

Définition 17 .
Soit $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ *et soit* $T \in]0, +\infty[$. *On dit que* T *est une période pour* f *si :*

$$\text{pour tout } x \in D_f, \quad (x+T) \in D_f \quad \text{et} \quad f(x+T) = f(x).$$

Exemple 18 *Soit* f *la fonction numérique définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) - \cos x$$

Montrons que 2π *est une période de* f *:*

■

$$(\forall x \in \mathbb{R}), \quad x + 2\pi \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

■ *Soit* $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(x+2\pi) &= \frac{1}{2}\sin(2(x+2\pi)) - \cos(x+2\pi) \\ &= \frac{1}{2}\sin(2x+4\pi) - \cos(x) \\ &= \frac{1}{2}\sin(2x) - \cos(x) = f(x) \qquad (2) \end{aligned}$$

D'après (1) *et* (2) *on en déduit que* 2π *est une période de* f.

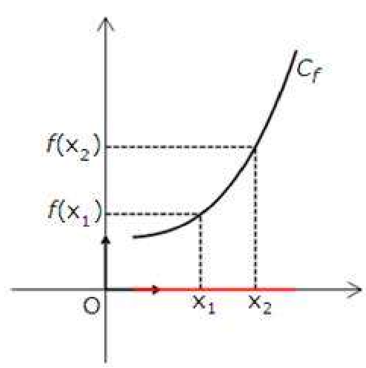
Remarque 19 *Pour étudier une fonction périodique de période* T, *il suffit de l'étudier sur un intervalle de* $\mathbb{R}$ *de longueur* T. $\Big($ *Très souvent, on choisit un des deux intervalles* $[0, T[$ *ou* $\left[\frac{-T}{2}, \frac{T}{2}\right[\Big)$.

Les variations d'une fonction numérique

Définition 20 *Soit* f *une fonction numérique définie sur l'intervalle* I.

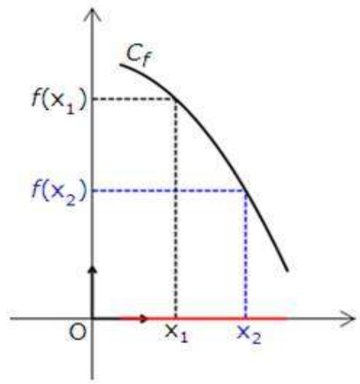
- f *est croissante sur l'intervalle* I *si pour tout* $x_1 \in I$, *pour tout* $x_2 \in I$, $x_1 \leq x_2$ *alors* $f(x_1) \leq f(x_2)$.

- f *est strictement croissante sur l'intervalle* I *si pour tout* $x_1 \in I$, *pour tout* $x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ *alors* $f(x_1) < f(x_2)$

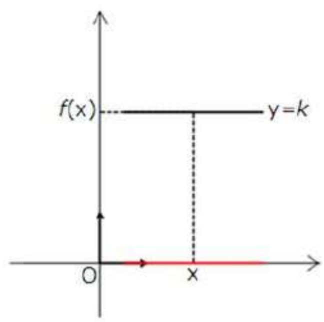


- *f est décroissante sur l'intervalle I si pour tout $x_1 \in I$, pour tout $x_2 \in I$, $x_1 \leq x_2$ alors $f(x_1) \geq f(x_2)$.*

- *f est strictement décroissante sur l'intervalle I si pour tout $x_1 \in I$, pour tout $x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) \succ f(x_2)$.*



- *f est constante sur l'intervalle I s'il existe un réel k tel que pour tout $x \in I$, $f(x) = k$.*



- *La fonction f est dite monotone sur I si et seulement si elle est croissante ou décroissante sur I.*

- *La fonction f est dite strictement monotone sur I si et seulement si elle est strictement croissante ou strictement décroissante sur I.*

Exemple 21 *Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par : $f(x) = \frac{1}{x+1}$.*
Étudier la monotonie de la fonction f sur les intervalles $]-1, +\infty[$ et $]-\infty, -1[$.

Étude des variations

- L'étude des variations d'une fonction f consiste à déterminer les intervalles de D_f sur lesquels cette fonction est croissante ou décroissante. Le résultat de cette étude permet de construire un **tableau de variations.**

- Pour construire le tableau des variations de la fonction f sur D_f on détermine les intervalles I contenus dans D_f sur lesquels f est monotone, c'est-à-dire soit croissante, soit décroissante. On note les résultats obtenus dans un tableau où des flèches indiquent la croissance ou la décroissance de f.

Exemple 22 *Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ qui vérifie :*

- *f est croissante sur les intervalles $]-\infty, -1[$ et $[2, +\infty[$.*
- *f est décroissante sur l'intervalle $[-1, 2]$ et $f(-1) = 2$ et $f(2) = -1$.*

Donner le tableau de variations de la fonction f

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
f		$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	

Taux de variations d'une fonction

Propriété 23 *Soit f une fonction numérique définie sur l'intervalle I. pour tous x et y deux éléments* ***distincts*** *de I. Le taux de variation de la fonction f entre x et y est : $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$.*

- *Si pour tous x et y deux éléments de I on a : $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \geq 0$ alors f est croissante sur I.*
- *Si pour tous x et y deux éléments de I on a : $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \succ 0$ alors f est strictement croissante sur I.*
- *Si pour tous x et y deux éléments de I on a : $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq 0$ alors f est décroissante sur I.*
- *Si pour tous x et y deux éléments de I on a : $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \prec 0$ alors f est strictement décroissante sur I.*
- *Si pour tous x et y deux éléments de I on a : $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = 0$ alors f est constante sur I.*

Exemple 24 *Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par :*

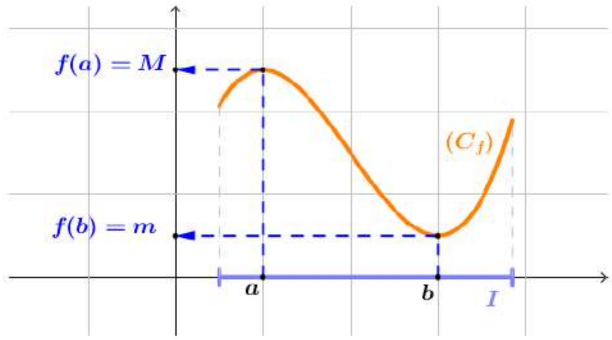
$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

1. *Soient x et y deux éléments distincts de $\mathbb{R}^*$. Montrer que : $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{xy-1}{xy}$.*
2. *Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$.*

Extremum d'une fonction

Définition 25 *Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I et a un élément de I.*

1. *On dit que $f(a)$ est une valeur maximale de la fonction f sur l'intervalle I si, et seulement si $f(x) \leq f(a)$ pour tout $x \in I$.*



2. *On dit que $f(b)$ est une valeur minimale de la fonction f sur l'intervalle I si, et seulement si $f(x) \geq f(b)$ pour tout $x \in I$.*

Remarque 26 *Un extremum est un maximum ou un minimum.*

Exemple 27 *On considère la fonction f définie par :*

x	-3		2		1		3		4
f	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

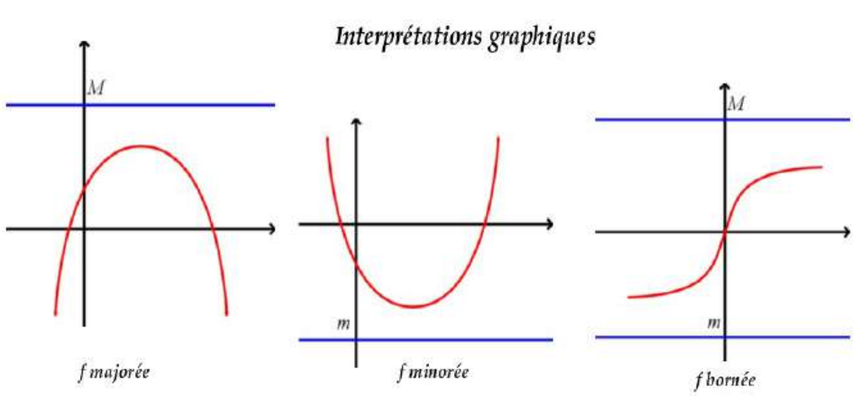
Déterminer la valeur maximale et minimale de f sur $[-3, 4]$.

Fonction majorée, fonction minorée et fonction bornée

Définition 28 .

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que :

- *f est majorée sur I : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \quad f(x) \leq M$,*
- *f est minorée sur I : $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \quad f(x) \geq m$,*
- *f est bornée sur I : f est majorée et minorée : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \quad |f(x)| \leq M$.*



Exemple 29 *On considère f la fonction numérique définie par :*

$$f(x) = -2x^2 + 4x + 1$$

Montrer que la fonction f est majorée par 3.
Il faut montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})\,,\ f(x) \leq 3.$
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(x) - 3 &= -2x^2 + 4x + 1 - 3 \\ &= -2x^2 + 4x - 2 \\ &= -2\left(x^2 - 2x + 1\right) \\ &= -2(x-1)^2 \leq 0 \end{aligned}$$

Donc

$$(\forall x \in \mathbb{R})\,, \quad f(x) \leq 3.$$

Ceci signifie que la fonction f est majorée par 3.

Exemple 30 *On considère f la fonction numérique définie par :*

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x + 1}{x^2 + 1}$$

Montrer que la fonction f est minorée par -1.
Il faut montrer que : $(\forall x \in D_f)\,,\ f(x) \geq -1.$
On a

$$\begin{aligned} D_f &= \left\{x \in \mathbb{R} / \ \ x^2 + 1 \neq 0\right\} \\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(x) + 1 &= \frac{x^2 + 4x + 1}{x^2 + 1} + 1 \\ &= \frac{x^2 + 4x + 1 + x^2 + 1}{x^2 + 1} \\ &= \frac{2x^2 + 4x + 2}{x^2 + 1} \\ &= \frac{2\left(x^2 + 2x + 1\right)}{x^2 + 1} \\ &= \frac{2(x+1)^2}{x^2 + 1} \geq 0 \end{aligned}$$

Donc

$$(\forall x \in \mathbb{R})\,, \quad f(x) \geq -1.$$

Ceci signifie que la fonction f est minorée par -1.

Exemple 31 *On considère f la fonction numérique définie par :*

$$f(x) = \frac{2x^2+3}{x^2+1}$$

Montrer que la fonction f est minorée par 2, est-ce-que 2 est une valeur minimale de la fonction f.

■ *Il faut montrer que : $(\forall x \in D_f)$, $f(x) \geq 2$.*

On a

$$\begin{aligned} D_f &= \left\{x \in \mathbb{R} / \ \ x^2+1 \neq 0\right\} \\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(x) - 2 &= \frac{2x^2+3}{x^2+1} - 2 \\ &= \frac{2x^2+3-2x^2-2}{x^2+1} \\ &= \frac{1}{x^2+1} \geq 0 \end{aligned}$$

Donc

$$(\forall x \in \mathbb{R}), \quad f(x) \geq 2.$$

■ *Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 2$.*

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = 2 \iff \frac{2x^2+3}{x^2+1} = 2 \iff 2x^2+3 = 2x^2+2 \iff 3 = 2 \quad (\textit{Ce qui est impossible})$$

Donc

$$(\forall x \in \mathbb{R}), \quad f(x) \neq 2$$

Ceci signifie que 2 n'est pas une valeur minimale de la fonction f.

Fonctions de référence

L'étude et la représentation graphique de la fonction $x \longmapsto ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$

Soient a, b et c des réels tels que $a \neq 0$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Définition 32 *Une fonction polynôme de degré 2 est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b et c des réels et $a \neq 0$.*

Forme canonique

Propriété 33 *Toute fonction polynôme f de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, peut s'écrire sous la forme :*

$$f(x) = a\,(x - \alpha)^2 + \beta \quad \text{avec} \;\; \alpha = -\frac{b}{2a} \;\; \text{et} \quad \beta = f(\alpha)$$

Variations

Propriété 34 (*Admis*)

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2+bx+c$ avec $a \neq 0$. Les variations de f sont données par les tableaux suivants : {}

1er cas. . *Si $a \succ 0$.*

x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$		$+\infty$
f		$\searrow$	$f(\frac{-b}{a})$	$\nearrow$	

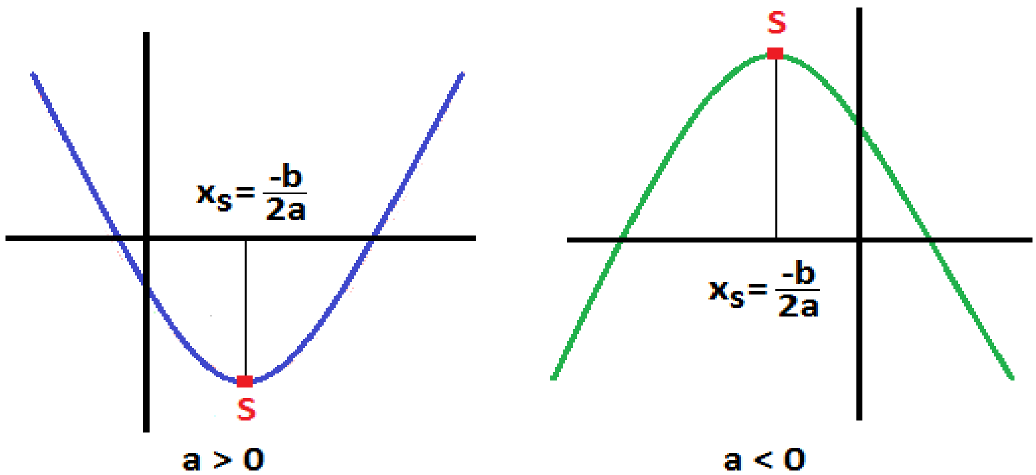
2ème cas. *Si $a \prec 0$.*

x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$		$+\infty$
f		$\nearrow$	$f(\frac{-b}{a})$	$\searrow$	

Remarque 35 *La forme canonique d'une fonction polynôme du second degré, permet de déduire ses variations à partir des variations de la fonction carrée.*

La représentation graphique de la fonction f.

La courbe représentative de la fonction f est appelée parabole de sommet $S(\alpha, \beta)$ et a pour axe de symétrie la droite d'équation $x = \frac{-b}{2a}$.



Exemple 36 *On considère la fonction f définie par :*

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{11}{2}$$

1. *Déterminer le tableau de variations de la fonction f.*
2. *Tracer la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.*

L'étude et la représentation graphique de la fonction $x \longmapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ avec a, b, c et d des réels et $c \neq 0$.

On considère la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Définition 37 *On appelle fonction homographique toute fonction f qui peut s'écrire sous la forme $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ où a, b et $c \neq 0$ et d sont des réels tels que $ad - bc \neq 0$.*

- **L'ensemble de définition de la fonction.**

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R} / \ cx + d \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / \ cx \neq -d\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} / \ x \neq \frac{-d}{c}\right\} \\ &= \left]-\infty, \frac{-d}{c}\right[\cup \left]\frac{-d}{c}, +\infty\right[\end{aligned}$$

- **Les variations de la fonction f.**

■ 1ère cas. Si $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \succ 0.$

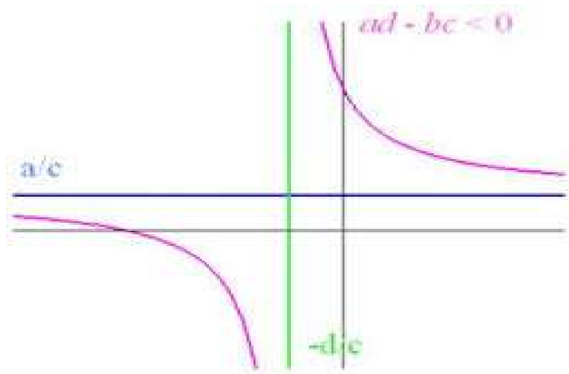
x	$-\infty$		$\frac{-d}{c}$		$+\infty$
f		$\nearrow$	$\|$	$\nearrow$	

■ 2éme cas. Si $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc < 0.$

x	$-\infty$		$\frac{-d}{c}$		$+\infty$
f		$\searrow$	$\|$	$\searrow$	

- **La représentation graphique de la fonction** f.

  La courbe représentative de la fonction f est appelée hyperbole et le point $S\left(\frac{-d}{c}, \frac{a}{c}\right)$, son centre de symétrie, et les droites d'équations : $x = \frac{-d}{c}$ et $y = \frac{a}{c}$ sont ses deux asymptotes.



Exemple 38 *On considère la fonction f définie par :*

$$f(x) = \frac{3x - 1}{2x + 1}$$

1. *Déterminer D_f.*
2. *Donner le tableau de variations de la fonction f.*
3. *Tracer la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.*

La fonction racine carrée

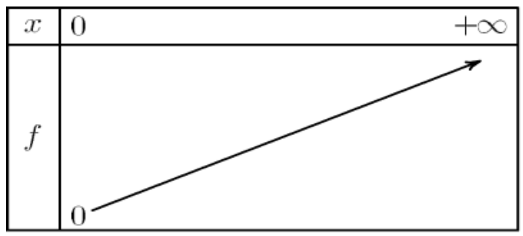
Définition 39 *La fonction racine carrée est la fonction définie sur* $[0, +\infty[$ *par :* $f(x) = \sqrt{x}$.

Étude des variations : Soient x et y deux réels de $[0, +\infty[$ tels que : $x \neq y$.

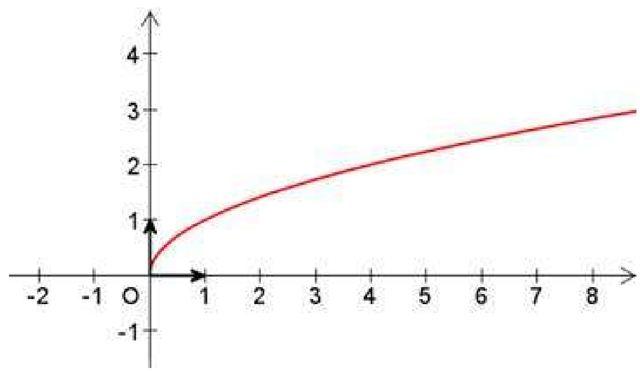
$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x - y} = \frac{x - y}{(x - y)\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \succ 0.$$

La fonction f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

Tableau de variations :



Courbe représentative :



L'étude et représentation graphique de la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x + a}$

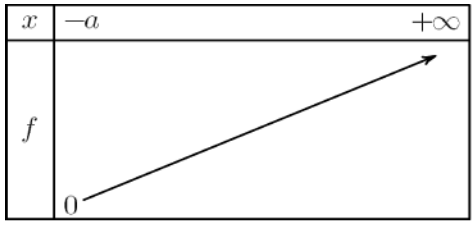
- La fonction f est définie sur $[-a, +\infty[$.
- Monotonie de f sur $[-a, +\infty[$.

  Soient x et y deux éléments de $[-a, +\infty[$ tels que : $x < y$.

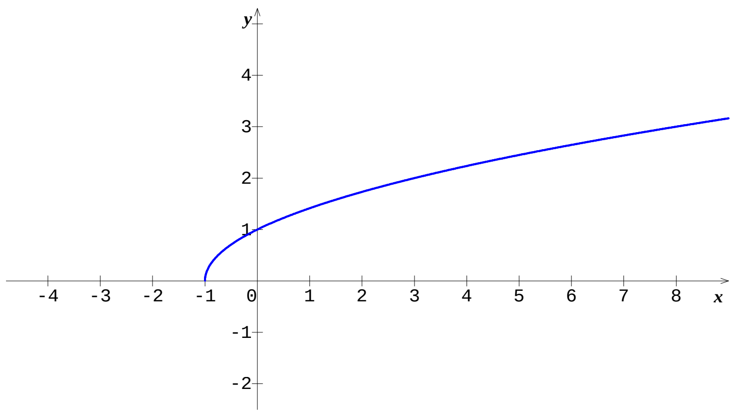
$$\begin{aligned} x &< y \Longrightarrow x + a < a + y \\ &\Longrightarrow \sqrt{x + a} < \sqrt{y + a} \\ &\Longrightarrow f(x) < f(y) \end{aligned}$$

Donc la fonction f est strictement croissante sur $[-a, +\infty[$.

- Le tableau de variations de f.



- Courbe représentative :



Cas de la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{a-x}$.

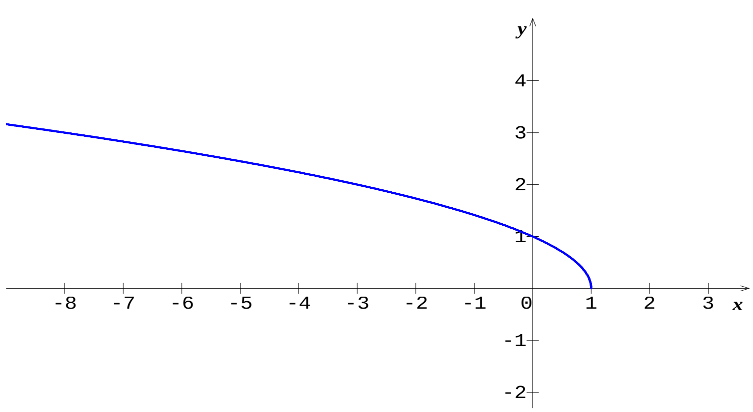
- La fonction f est définie sur $]-\infty, a]$.
- Monotonie de f sur $]-\infty, a]$.

  Soient x et y deux éléments de $]-\infty, a]$ tels que : $x < y$.

$$\begin{aligned} x < y &\Longrightarrow -y < -x \\ &\Longrightarrow \sqrt{a-y} < \sqrt{a-x} \\ &\Longrightarrow f(y) < f(x) \end{aligned}$$

  Donc la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty, a]$.

- courbe représentative :



Fonction cube

Définition 40 *La fonction cube est la fonction qui à tout réel x associe le réel x^3. La fonction cube est donc la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3$.*

Étude des variations : Soient x et y deux réels tels que : $x \neq y$.

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{x^3 - y^3}{x - y} = \frac{(x - y)\left(x^2 + xy + y^2\right)}{x - y} = x^2 + xy + y^2$$

On peut considérer le trinôme du second degré en x. Calculons le discriminant Δ :

$$\Delta = y^2 - 4 \times 1 \times y^2 = -3y^2 < 0$$

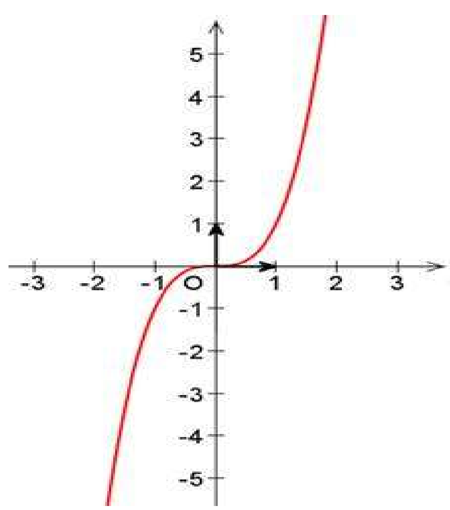
On en déduit que le signe du trinôme est toujours le signe de 1 $(coefficient\ de\ x^2)$, donc : $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \succ 0$.

La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variations :

x	$-\infty$	$+\infty$
f		$\nearrow$

Courbe représentative :



Fonction partie entière (1ère SM)

Définition et propriétés de la fonction partie entière

Définition 41 *Soit x un réel. La partie entière de x, notée $E(x)$ (ou aussi $[x]$), est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.*

Exemple 42 $E(2,7)=2$, $E(3)=3$, $E(-1,2)=-2$ *et* $E(-2,3)=-3$.

Remarque 43 .

- $\forall x\in\mathbb{R},\ \ E(x)\in\mathbb{Z}$.
- $\forall x\in\mathbb{Z},\ \ E(x)=x$.

Propriété 44 *Soit x un réel et k un entier relatif.*

$$E(x)=k\iff k\leq x<k+1$$

On a aussi deux encadrements à connaître :

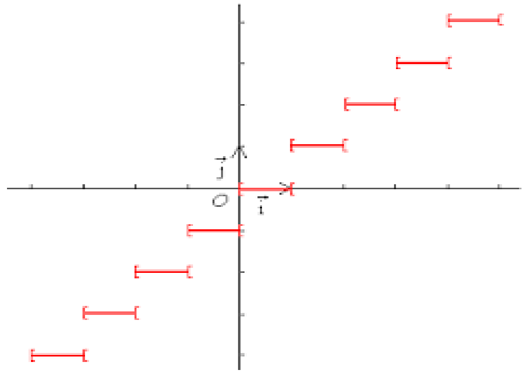
$$\forall x\in\mathbb{R}, E(x)\leq x<E(x)+1 \quad et \quad x-1<E(x)\leq x$$

Exemple 45 *Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suvantes :* $E(x)=-2$, $E(x)=5$ *et* $2E(x)=1$.

- *Soit $x\in\mathbb{R}$.*
$$E(x)=-2\iff -2\leq x<-1\iff x\in[-2,1[$$
donc
$$S=[-2,1[$$
- *Soit $x\in\mathbb{R}$.*
$$E(x)=5\iff 5\leq x<6\iff x\in[5,6[$$
donc
$$S=[5,6[$$
- *Soit $x\in\mathbb{R}$.*
$$2E(x)=1\iff E(x)=\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}$$
donc
$$S=\varnothing$$

Propriété 46 (*Admis*)
La fonction partie entière est croissante sur $\mathbb{R}$.

Voici le graphe de la fonction partie entière.



Exemple 47 *Montrer que :* $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\forall p \in \mathbb{Z})\,,\quad E(x+p) = E(x) + p.$

Soit $(x,p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}.$

On a $E(x) \leq x < E(x) + 1,$ *donc* $\underbrace{E(x) + p}_{\in \mathbb{Z}} \leq x + p < E(x) + 1 + p.$ *Alors*

$$(\forall x \in \mathbb{R})\,(\forall p \in \mathbb{Z})\,,\quad E(x+p) = E(x) + p.$$

Composée de deux fonctions

Définition d'une fonction composée

Activité

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x + 3$ et $g(x) = x^2 + 1.$

1. Déterminer D_f et D_g.
2. Calculer $f(1)$ et $g(5)$.
3. Calculer $f(3)$ et $g(f(3))$, puis $g(f(x))$.

Notation

La fonction $h : x \longmapsto h(x) = g(f(x))$ on la note par $h = g \circ f$ d'où $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Définition 48 *Soient* f *et* g *deux fonctions définies respectivement sur* D_f *et* D_g *telles que*

$$f(D_f) \subset D_g.$$

On pose : $D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} /\ x \in D_f \text{ et } f(x) \in D_g\}$. *La fonction* h *définie sur* $D_{g \circ f}$ *par* $h(x) = g(f(x))$ *est appelée la composée de* f *suivie de* g *et on note* $h = g \circ f$ *(lire* g *rond* f*)*.

Exemple 49 *On considère les deux fonctions f et g définies par :*

$$g(x) = \frac{x^2}{x^2+1} \quad et \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-x}}$$

Déterminer $g \circ f$.
On détermine $D_g = \mathbb{R}$ et $D_f =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$.
D'autre part

$$\begin{aligned} D_{g \circ f} &= \{x \in \mathbb{R} / \ x \in D_f \ \text{ et } \ f(x) \in D_g\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} / \ x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[\ \text{ et } \ \frac{1}{\sqrt{x^2-x}} \in \mathbb{R} \right\} \\ &=]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[. \end{aligned}$$

Soit $x \in D_{g \circ f}$.

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= \frac{(f(x))^2}{(f(x))^2+1} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-x}}\right)^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-x}}\right)^2+1} \\ &= \frac{\frac{1}{x^2-x}}{\frac{1}{x^2-x}+1} \\ &= \frac{1}{x^2-x+1} \end{aligned}$$

Donc

$$(\forall x \in D_{g \circ f}), \qquad (g \circ f)(x) = \frac{1}{x^2-x+1}.$$

Exemple 50 *On considère les deux fonctions f et g définies par :*

$$g(x) = \frac{x-1}{x-2} \quad et \quad f(x) = x^2 - x$$

Déterminer $f \circ g$.
On détermine $D_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ et $D_f = \mathbb{R}$.
D'autre part

$$\begin{aligned} D_{f \circ g} &= \{x \in \mathbb{R} / \ x \in D_g \ \text{ et } g(x) \in D_f\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} / \ x \in \mathbb{R} \setminus \{2\} \ \text{ et } \frac{x-1}{x-2} \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \mathbb{R} \setminus \{2\}. \end{aligned}$$

Soit $x \in D_{f \circ g}$.

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= (g(x))^2 - g(x) \\ &= \left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2 - \frac{x-1}{x-2} \\ &= \frac{x-1}{(x-2)^2}\end{aligned}$$

Donc

$$(\forall x \in D_{f \circ g}), \qquad (f \circ g)(x) = .\frac{x-1}{(x-2)^2}$$

Remarque 51 *La composée de deux fonctions n'est pas commutative c'est-à-dire :* $g \circ f \neq f \circ g$.

Variations d'une fonction composée

Propriété 52 (*Admis*)
Soient f *et* g *deux fonctions définies respectivement sur* I *et* J *telles que* $f(I) \subset J$.

- Si f *et* g *ont* ***même*** *monotonie (strictement monotone) respectivement sur* I *et* J *alors* $g \circ f$ *est croissante sur* I ($g \circ f$ *est strictement croissante sur* I).

- Si f *et* g *ont monotonie (strictement monotone)* ***opposées*** *respectivement sur* I *et* J *alors* $g \circ f$ *est décroissante sur* I ($g \circ f$ *est strictement décroissante sur* I).

Exemple 53 *On considère les deux fonctions* f *et* g *définies par :*

$$f(x) = \sqrt{x+2} \quad et \quad g(x) = \frac{x-3}{x+3}$$

1. *Déterminer* D_f *et* D_g.
2. *Soit* h *la fonction numérique définie sur* $[-2, +\infty[$ *par :*

$$h(x) = \frac{\sqrt{x+2}-3}{\sqrt{x+2}+3}$$

Déterminer la monotonie de h *sur* $[-2, +\infty[$.

- *L'ensemble de définition de la fonction* f.

$$\begin{aligned}D_f &= \{x \in \mathbb{R} / \ x+2 \geq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / \ x \geq -2\} \\ &= [-2, +\infty[.\end{aligned}$$

■ *L'ensemble de définition de la fonction g.*

$$\begin{aligned} D_g &= \{x \in \mathbb{R} /\ x+3 \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} /\ x \neq -3\} \\ &=]-\infty,-3[\cup]-3,+\infty[\,. \end{aligned}$$

■ *On détermine la mnotonie de h sur $[-2,+\infty[$.*

On a

$$(\forall x \in [-2,+\infty[)\,,\quad h(x)=(g\circ f)(x)\,.$$

La fonction f est strictement croissante sur $[-2,+\infty[$, et on a

x	-2		$+\infty$
f	0	$\nearrow$	

par suite $f([-2,+\infty[) \subset [0,+\infty[$, et comme g est strictement croissante sur $[0,+\infty[$, alors h est strictement croissante sur $[-2,+\infty[$.

Exemple 54 *On considère la fonction f définies par :*

$$f(x)=\frac{2x^2+4x+3}{x^2+2x+2}$$

On considère les deux fonctions u et v définies par :

$$v(x)=\frac{2x+3}{x+2} \quad et \quad u(x)=x^2+2x$$

1. *Donner les tableaux de variations des fonctions u et v.*
2. *Déterminer la monotonie de la fonction f sur $[-1,+\infty[$ et $]-\infty,-1]$.*

   ■ *On a : $u(x)=x^2+2x$ et $\frac{-b}{2a}=-1$ et $a \succ 0$ et $b=2 \succ 0$.*

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
u		$\searrow$	-1	$\nearrow$	

■ *On a :* $v(x) = \frac{2x+3}{x+2}$ *et* $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \succ 0.$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
v		$\nearrow$	$\|$	$\nearrow$	

■ *La monotonie de* f *sur* $[-1,+\infty[$.

On a

$$f = v \circ u$$

La fonction u *est strictement croissante sur* $[-1,+\infty[$ *,par suite* $u([-1,+\infty[) \subset [-1,+\infty[$ *et comme* v *est strictement croissante sur* $[-1,+\infty[$*, alors* f *est strictement croissante sur* $[-1,+\infty[$.

■ *La monotonie de* f *sur* $]-\infty,-1]$.

La fonction u *est strictement décroissante sur* $]-\infty,-1]$ *,par suite* $u(]-\infty,-1]) \subset [-1,+\infty[$ *et comme* v *est strictement croissante sur* $[-1,+\infty[$*, alors* f *est strictement décroissante sur* $]-\infty,-1]$.

Donc

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f		$\searrow$	1	$\nearrow$	

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**