Suites Numériques

Suite numérique

Définition d'une suite numérique

Définition 1 *Une suite numérique est une "succession" de nombre réels. Ces nombres réels sont les termes de la suite.*

A un rang donné n, on associe un nombre réel u_n.

$$\begin{array}{cccc} (u_n) : & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \longmapsto & u_n \end{array}$$

u_n est appelé le terme général de la suite (u_n).

Remarque 2 *Il arrive qu'une suite ne soit pas définie sur tout $\mathbb{N}$, on dit alors que la suite est définie à partir du rang.*

Exemple 3 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :*

$$u_n = \frac{2n-1}{n+1}$$

Calculons les trois premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$u_0 = -1, \quad u_1 = \frac{1}{2} \quad et \quad u_2 = 1$$

Définir une suite

De façon explicité

Définition 4 *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie de façon explicite si le terme général u_n s'exprime en fonction de n.*

$$u_n = f(n) \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Exemple 5 *Soit la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :*

$$u_n = 3n + 5$$

par exemple : $u_{10} = 3 \times 10 + 5 = 35$.

Par récurrence

Définition 6 *Lorsque le terme général u_n dépend du ou des terme(s) précédent(s), on définit alors la suite par une relation de récurrence et d'un ou des premier(s) terme(s).*

- *La suite est dite récurrente à un terme si u_n ne dépend que du terme précédent. Cette suite est alors définie par :*

$$\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

- *La suite est dite récurrente à deux termes si u_n dépend des deux termes qui le précèdent. Cette suite est alors définie par :*

$$\begin{cases} u_0 \ , \ u_1 \\ u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1}) \end{cases}$$

*La fonction f ainsi définie s'appelle la **fonction associée** à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Exemple 7 .

- *On donne la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :*

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n - 2 \end{cases}$$

Déterminer u_1, u_2, u_3 et u_4.

$$\begin{aligned} u_1 &= 3u_0 - 2 = 3 \times 2 - 2 = 4 \\ u_2 &= 3u_1 - 2 = 3 \times 4 - 2 = 10 \\ u_3 &= 3u_2 - 2 = 3 \times 10 - 2 = 28 \\ u_4 &= 3u_3 - 2 = 3 \times 28 - 2 = 82 \end{aligned}$$

- *On donne la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :*

$$\begin{cases} v_0 = 2 \ , \ v_1 = 1 \\ v_{n+2} = v_{n+1} + v_n \end{cases}$$

Déterminer v_2, v_3 et v_4.

$$\begin{aligned} v_2 &= v_1 + v_0 = 2 + 1 = 3 \\ v_3 &= v_2 + v_1 = 3 + 1 = 4 \\ v_4 &= v_3 + v_2 = 4 + 3 = 7 \end{aligned}$$

Sens de variations

Définition 8 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique.*

- *On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$.*
- *On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$.*
- *On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante ou stationnaire si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$,*
- *On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ou décroissante.*

Dans la pratique pour déterminer la variations d'une suite, on déterminera le signe de $u_{n+1} - u_n$.

- Si cette différence est positive, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite sera croissante.
- Si la différence est négative pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite sera décroissante.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive, étudier la position de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ par rapport à 1.

- Si ce rapport est supérieur à 1 pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite sera croissante.
- Si le rapport est inférieur à 1 pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite sera décroissante.

Exemple 9 .

- *On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n = \frac{5n-3}{2n+7}$.*

  Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{5(n+1)-3}{2(n+1)+7} - \frac{5n-3}{2n+7} \\ &= \frac{5n+5-3}{2n+2+7} - \frac{5n-3}{2n+7} \\ &= \frac{5n+2}{2n+9} - \frac{5n-3}{2n+7} \\ &= \frac{(5n+2)(2n+7)-(5n-3)(2n+9)}{(2n+9)(2n+7)} \\ &= \frac{41}{(2n+9)(2n+7)} \end{aligned}$$

  comme $\frac{41}{(2n+9)(2n+7)} \succ 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ceci signifie que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

- *On considère la suite numérique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n = \frac{2^{3n}}{3^{2n}}$.*

  Tous les termes de la suite sont strictements positifs.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

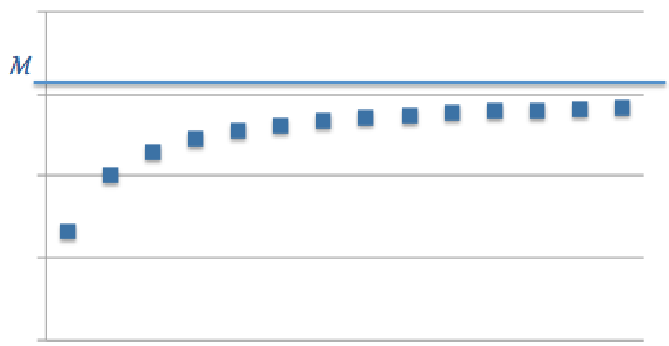
$$\begin{aligned}
\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{\frac{2^{3(n+1)}}{3^{2(n+1)}}}{\frac{2^{3n}}{3^{2n}}} \\
&= \frac{2^{3(n+1)}}{3^{2(n+1)}} \times \frac{3^{2n}}{2^{3n}} \\
&= \frac{2^{3n} \times 2^3}{3^{2n} \times 3^2} \times \frac{3^{2n}}{2^{3n}} \\
&= \frac{8}{9}
\end{aligned}$$

comme $\frac{8}{9} < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ceci signifie que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

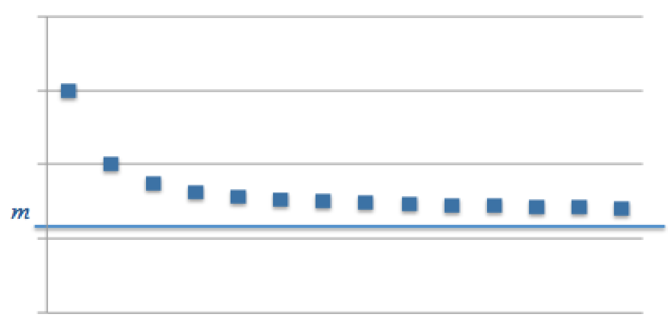
Suites majorées, suites minorées, suites bornées

Définition 10 .

- *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée s'il existe un réel M tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$.*



- *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée s'il existe un réel m tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$.*



- *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.*

Remarque 11 .

- *Les suites de terme général* $\cos n$ *ou* $(-1)^n$ *sont bornées.*
- *La suites de terme général* n^2 *est minorée par* 0.

Exemple 12 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite numérique définie par :*

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \quad u_n = \frac{2+\cos n}{3-\sin\sqrt{n}}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.
On a

$$-1 \leq \cos n \leq 1 \iff 1 \leq 2+\cos n \leq 3$$

et

$$-1 \leq \sin\sqrt{n} \leq 1 \iff 2 \leq 3-\sin\sqrt{n} \leq 4 \iff \frac{1}{4} \leq \frac{1}{3-\sin\sqrt{n}} \leq \frac{1}{2}$$

donc

$$\frac{1}{4} \leq \frac{2+\cos n}{3-\sin\sqrt{n}} \leq \frac{3}{2}$$

d'où

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \quad \frac{1}{4} \leq u_n \leq \frac{3}{2}$$

ceci signifie que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée.*

Suites arithmétiques

Définition des suites arithmétiques

Définition 13 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite numérique.*

- *La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est arithmétique si et seulement si il existe un réel* r *tel que pour tout entier* $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.
- *Le nombre* r *s'appelle alors la raison de la suite arithmétique* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Comment reconnait-on une suite arithmétique ?

Propriété 14 *Une suite est arithmétique lorsque la différence entre deux termes consécutifs est constante. On a alors :*

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \; u_{n+1} - u_n = r$$

Exemple 15 *Montrer que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :* $u_n = 2n+3$ *est arithmétique.*
On calcule la différence entre deux termes consécutifs quelconques :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 2(n+1) + 3 - (2n+3) \\ &= 2 \end{aligned}$$

donc

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \; u_{n+1} - u_n = 2$$

Ceci signifie que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite arithmétique de raison* 2 *et de premier terme* $u_0 = 3$.

Expression du terme général en fonction de n

Une suite arithmétique est définie par une relation de récurrence :

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \ u_{n+1} = u_n + r$$

On exprime directement u_n en fonction de n.

Théorème 16 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r.*

■
$$(\forall n \in \mathbb{N}), \quad u_n = u_0 + nr$$

■
$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \quad u_n = u_p + (n-p)\, r$$

Démonstration 17 *.*

■ *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r.*

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 + nr$.

- $u_0 + 0 \times r = u_0$ *et donc l'égalité est vraie quand $n = 0$.*
- *Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n = u_0 + nr$ et montrons que $u_{n+1} = u_0 + (n+1)\, r$.*

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + r \quad (\textit{d'après la définition de la suite arithmétique}) \\ &= u_0 + nr + r \\ &= u_0 + (n+1)\, r \end{aligned}$$

- *D'après le principe de récurrence on déduit que*

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \quad u_n = u_0 + nr$$

■ *Soient n et p deux entiers naturels. $u_n = u_0 + nr$ et $u_p = u_0 + pr$. Donc*

$$u_n - u_p = (u_0 + nr) - (u_0 + pr) = nr - pr = (n-p)r$$

donc

$$u_n = u_p + (n-p)\, r$$

□

Exemple 18 *Considérons la suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que : $u_5 = 7$ et $u_9 = 19$.*

1. *Déterminer la raison et le premier terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
2. *Exprimer u_n en fonction de n.*

■ *On exprime u_9 en fonction de u_5, on a alors :*

$$u_9 = u_5 + (9-5)\,r \iff 19 = 7 + 4r \iff 12 = 4r \iff r = \frac{12}{4} = 3.$$

On peut alors trouver u_0.

$$u_5 = u_0 + 3 \times 5 \iff u_0 = 7 - 15 = -8$$

■ *u_n en fonction de n :*

$$u_n = 3n - 8$$

Exercice d'application 19 .
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}), \quad u_{n+1} = \frac{4}{4-u_n} \end{cases}$$

1. *Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $1 \leq u_n < 2$.*

2. *Pour tout entier naturel n, on pose :*

$$v_n = \frac{1}{u_n - 2}$$

a) *Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique. Préciser son premier terme et sa raison.*

b) *Déterminer v_n en fonction de n.*

c) *En déduire u_n en fonction de n.*

Sommes de termes consécutifs d'une suite arithmétique

Théorème 20 *Pour tout entier naturel non nul n,*

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

Démonstration 21 *Montrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$.*

■ $\frac{1(1+1)}{2} = 1$, *donc l'égalité est vraie pour $n = 1$.*

■ *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *Supposons que* $1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$ *et montrons que :*

$$1+2+3+...+n+1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Alors

$$\begin{aligned} 1+2+3+...+n+1 &= \Big(\underbrace{1+2+3+...+n}_{\textit{hypothèse de récurrence}}\Big)+n+1 \\ &= \frac{n(n+1)}{2}+n+1 \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

■ *Donc d'après le principe de récurrence on déduit que pour tout entier naturel non nul*

$$1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

□

Théorème 22 (*Admis*)
Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *une suite arithmétique. Soient* n *et* p *deux entiers naturels tels que* $n \geq p$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=p}^{n} u_k &= u_p + u_{p+1} + ... + u_n \\ &= \frac{(\textit{premier terme } + \textit{ dernier terme}) \times (\textit{nombre de termes})}{2} \\ &= \frac{(u_p+u_n)(n-p+1)}{2} \end{aligned}$$

Exemple 23 .
Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{k=33}^{67} k \quad , \quad \sum_{k=1}^{n}(2k-1) \quad \textit{avec} \quad (n\in\mathbb{N}^*) \quad \textit{et} \quad \sum_{k=0}^{n}(3k+2) \quad \textit{avec} \quad (n\in\mathbb{N}).$$

■

$$\begin{aligned} \sum_{k=33}^{67} k &= 33+34+35+...+67 \\ &= \frac{(33+67)\times(67-33+1)}{2} \\ &= 1750 \end{aligned}$$

■ *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(2k-1) &= 1+3+5+...+2n-1\\ &= \frac{(1+(2n-1))\times n}{2}\\ &= n^2\end{aligned}$$

■ *Soit* $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(3k+2) &= 2+5+8+11+...+3n+2\\ &= \frac{(2+3n+2)\times(n+1)}{2}\\ &= \frac{(3n+4)(n+1)}{2}\end{aligned}$$

Suites géométriques

Définition des suites géométriques

Définition 24 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite numérique.*

■ *La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est géométrique si et seulement si il existe un réel* q *tel que pour tout entier naturel* n, $u_{n+1} = q \times u_n$.

■ *Le nombre* q *s'appelle alors la raison de la suite géométrique* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Comment reconnait-on une suite géométrique

Propriété 25 *Une suite est géométrique lorsque le rapport entre deux termes consécutifs est constant. On a alors :*

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$$

Exemple 26 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par :*

$$u_n = 3 \times 2^n$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.*

■ *Soit* $n \in \mathbb{N}$. $u_n \neq 0$ *ensuite*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3\times 2^{n+1}}{3\times 2^n} = 2$$

donc

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = 2$$

On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite géométrique de raison* 2. *Son premier terme est* $u_0 = 3$.

Expression du terme général en fonction de n

Théorème 27 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 0$.*

■
$$(\forall n \in \mathbb{N}), \quad u_n = u_0 \times q^n$$

■
$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \quad u_n = u_p \times q^{n-p}$$

Démonstration 28 *.*

■ *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison non nulle q.*

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 \times q^n$.

- *Puisque $q \neq 0$, $q^0 = 1$ puis $u_0 \times q^0 = u_0$ et donc l'égalité est vraie quand $n = 0$.*
- *Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n = u_0 \times q^n$ et montrons que : $u_{n+1} = u_0 \times q^{n+1}$.*

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n \times q \\ &= u_0 \times q^n \times q \\ &= u_0 \times q^{n+1} \end{aligned}$$

- *D'après le principe de récurrence on déduit que pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 \times q^n$.*

■ *Soient n et p deux entiers naturels.*

$$u_n = u_0 \times q^n \text{ et } \ u_p = u_0 \times q^p$$

- *Si $u_0 = 0$, on a $u_n = u_p = 0$, alors : $u_n = u_p \times q^{n-p}$.*
- *Si $u_0 \neq 0$, alors $u_p \neq 0$. On peut écrire*

$$\frac{u_n}{u_p} = \frac{u_0 \times q^n}{u_0 \times q^p} = \frac{q^n}{q^p} = q^{n-p}$$

donc
$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \quad u_n = u_p \times q^{n-p}$$

□

Exemple 29 *Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ géométrique de raison q. On donne : $u_7 = 4374$ et $u_5 = 486$. Trouver la raison q et le premier terme u_0 et u_{10} sachant que la raison est positive.*

■ *On exprime u_5 en fonction de u_7, on a alors :*

$$u_7 = q^{7-5} \times u_5 \iff 4374 = q^2 \times 486 \iff q^2 = \frac{4374}{486} = 9 \iff q = 3 \text{ ou } q = -3$$

On obtient les deux solutions : $q = 3$ ou $q = -3$. Comme la raison est positive, $q = 3$.

■ *On peut alors trouver u_0.*

$$u_5 = q^5 \times u_0 \iff 486 = 3^5 \times u_0 \iff u_0 = \frac{486}{243} = 2$$

■ *On peut alors trouver u_{10}.*

$$\begin{aligned} u_{10} &= q^{10-7} \times u_7 \\ &= q^3 \times 4374 \\ &= 2^3 \times 4374 \\ &= 118098 \end{aligned}$$

Exercice d'application 30 .

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}), \quad u_{n+1} = 3u_n - 4 \end{cases}$$

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$v_n = u_n - 2$$

1. *Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique. Préciser son premier terme et sa raison.*
2. *Déterminer v_n en fonction de n.*
3. *En déduire u_n en fonction de n.*

Sommes de termes consécutifs d'une suite géométrique

Théorème 31 *n est un entier naturel non nul et q un réel différent de 1 alors on a :*

$$1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Démonstration 32 .

On note

$$S = 1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^n$$

et

$$q \times S = q + q^2 + q^3 + q^4 + ... + q^{n+1}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} S - q \times S &= \left(1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^n\right) - \left(q + q^2 + q^3 + q^4 + ... + q^{n+1}\right) \\ &= 1 - q^{n+1} \end{aligned}$$

donc

$$S = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

□

Théorème 33 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$. Soient n et p deux entiers naturels tels que $n \geq p$.*

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{n} u_k &= u_p + u_{p+1} + ... + u_n \\ &= (premier\ terme) \times \frac{1 - q^{nombre\ termes}}{1-q} \\ &= u_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}\end{aligned}$$

Démonstration 34 *Soient n et p deux entiers naturels tels que $n \geq p$. Comme $q \neq 1$,*

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{n} u_k &= u_p + u_{p+1} + ... + \underbrace{u_n}_{=q^{n-p}\times u_p} \\ &= u_p + u_{p+1} + ... + u_p \times q^{n-p} \\ &= u_p\left(1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^{n-p}\right) \\ &= u_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}\end{aligned}$$

□

Exemple 35 *Calculer les sommes suivantes :*

$$\sum_{k=0}^{10} 2^k \quad et \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{5}{3^k} \ avec \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

■

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{10} 2^k &= 2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^{10} \\ &= \frac{1-2^{10-0+1}}{1-2} \\ &= 2^{11} - 1 \\ &= 2047\end{aligned}$$

■ *Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{5}{3^k} &= 5\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k} \\ &= 5\left(\frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{3^n}\right) \\ &= \frac{5}{3} \times \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} \\ &= \frac{5}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right).\end{aligned}$$

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude – generale.com