Devoir surveillé N2

Durée 1H30

Exercice 1 *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite numérique définie par :*

$$\begin{cases} a_0 = 1,\ a_1 = 2 \\ (\forall n \in \mathbb{N}),\ a_{n+2} = \frac{3a_{n+1}.a_n}{2a_{n+1}+a_n} \end{cases}$$

Et pour tout $n \in \mathbb{N}$*, on pose :* $b_n = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}$

1. **a)** *Montrer que la suite* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est géométrique en précisant sa raison et le premier terme.*

   b) *En déduire* b_n *en fonction de* n *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

2. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*, on pose :* $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} b_k$.

   Calculer S_n *par deux manières différentes, puis en déduire que*

$$(\forall n \in \mathbb{N}),\ a_n = \frac{10}{7 + 3\left(\frac{-2}{3}\right)^n}$$

Exercice 2 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite numérique définie par :*

$$\begin{cases} u_0 = 1,\ u_1 = 2 \\ (\forall n \in \mathbb{N}),\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n - 3 \end{cases}$$

Et pour tout $n \in \mathbb{N}$*, on pose :* $v_n = u_{n+1} - u_n$.

1. **a)** *Montrer que la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est arithmétique en précisant sa raison et le premier terme.*

   b) *En déduire* v_n *en fonction de* n *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

2. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*, on pose :* $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k$.

   Calculer S_n *par deux manières différentes, puis en déduire que*

$$(\forall n \in \mathbb{N}),\ u_n = \frac{-3n^2 + 5n + 4}{2}$$

Exercice 3 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite numérique définie par :*

$$u_0 = a \quad et \quad (\forall n \in \mathbb{N}),\ u_{n+1} = \frac{u_n^2}{1 - 2u_n^2} \text{ où } a \in \left]0, \frac{1}{4}\right[$$

1. *Montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N}), 0 < u_n < \frac{1}{4}$.
2. *Montrer que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est strictement décroissante.*
3. *Montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} < \frac{2}{7}u_n$.
4. *En déduire que :* $(\forall n \in \mathbb{N}^*), u_n < \left(\frac{2}{7}\right)^n a$.

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude – generale.com