Matiére : Mathématiques
Professeur : Yahya MATIOUI

Le calcul trigonométrique 2

Équation, Inéquation et représentations graphiques des fonctions trigonométriques

La représentation graphique de fonction $\cos$

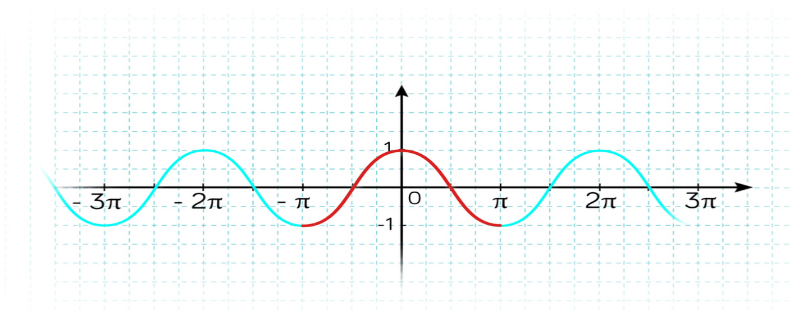
La fonction cosinus

Définition 1 .

La fonction cosinus, notée $\cos$, *est la fonction qui à tout réel* x *associe son cosinus.*

$$\begin{array}{cccc} \cos & \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1,1] \\ & x & \longmapsto & \cos x \end{array}$$

Sa courbe représentative est la suivante :



La représentation graphique de fonction $\sin$

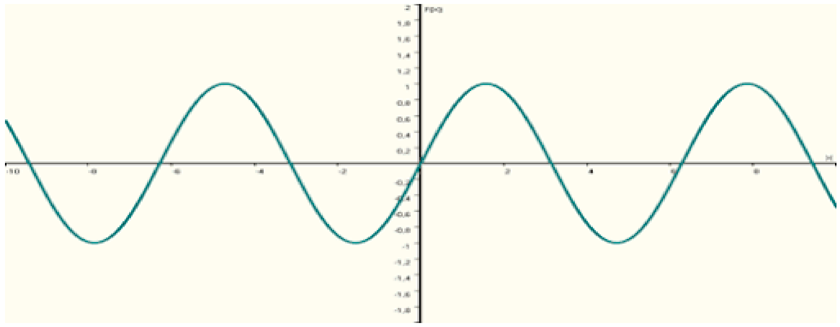
La fonction sinus

Définition 2 .

La fonction sinus, notée $\sin$, *est la fonction qui à tout réel* x *associe son sinus.*

$$\begin{array}{cccc} \sin & \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1,1] \\ & x & \longmapsto & \sin x \end{array}$$

Sa courbe représentative est la suivante :



Fonction périodique

Définition 3 .

Soit $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $T \in]0, +\infty[$. On dit que T est une période pour f si :

$$\text{pour tout } x \in D_f, \quad x + T \in D_f \quad \text{et} \quad f(x+T) = f(x)$$

Exemple 4 *Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $(x + 2\pi) \in \mathbb{R}$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin x$. Donc la fonction* $\sin$ *est périodique de période 2π.*

Résolution d'équations trigonométriques

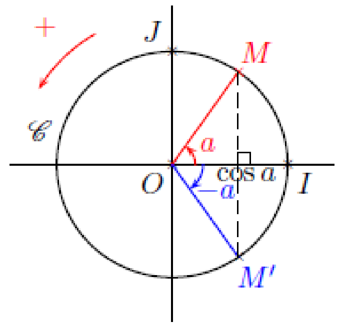
Équation trigonométrique du type $\cos x = a$.

Propriété 5 *Soit a un réel.*

On considère l'équation $(E_1) : \cos x = a$.

- *Si : $|a| \succ 1$, il n'y a pas de solution.*
- *Si : $|a| \leq 1$, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $a = \cos \alpha$. L'équation devient alors $\cos x = \cos \alpha$ et on a donc :*

$$\left\{ \begin{array}{c} x = \alpha + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{array} \right. \quad / k \in \mathbb{Z}$$

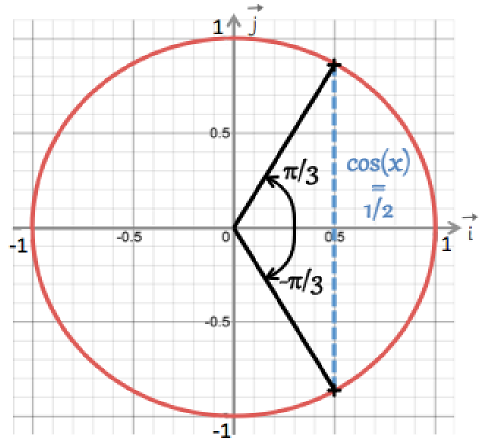


Alors les solutions d'équation (E_1) dans $\mathbb{R}$ sont les réels : $\alpha + 2k\pi$ ou $-\alpha + 2k\pi$ tel que $k \in \mathbb{Z}$.

Exemple 6 *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation :* $(E) : \cos x = \frac{1}{2}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

On a : $\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$.



Donc

$$\cos x = \cos\frac{\pi}{3} \iff \left\{\begin{array}{c} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ ou \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{array}\right. \quad /k \in \mathbb{Z}$$

Donc les solutions de l'équation (E) *dans* $\mathbb{R}$ *sont :*

$$S = \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi/\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi/\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Exemple 7 *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation :* $(E) : \cos x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$.

On a : $\frac{-\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{5\pi}{6}$. *Donc*

$$\cos x = \cos\frac{5\pi}{6} \iff \left\{\begin{array}{c} x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ ou \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. \quad /k \in \mathbb{Z}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) *dans* $\mathbb{R}$ *sont :*

$$S = \left\{-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi/\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi/\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Exemple 8 *Résoudre dans* $[-\pi, \pi[$ *l'équation :* $(E) : \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Soit $x \in [-\pi, \pi[$.

On a : $\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4}$. *Donc*

$$\cos x = \cos\frac{\pi}{4} \iff \left\{\begin{array}{c} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ ou \\ x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{array}\right. \quad /k \in \mathbb{Z}$$

Cherchons parmi ces solutions ceux qui appartiennent à l'intervalle $[-\pi, \pi[$.

Donc

$$\begin{aligned}
-\pi \quad &\preceq \quad \frac{\pi}{4} + 2k\pi \prec \pi \\
&\Longleftrightarrow \quad -1 \preceq \frac{1}{4} + 2k \prec 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{-5}{4} \preceq 2k \prec \frac{3}{4} \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{-5}{8} \preceq k \prec \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

et comme $k \in \mathbb{Z}$, alors $k = 0$. Donc : $x = \frac{\pi}{4}$.
De même on a :

$$\begin{aligned}
-\pi \quad &\preceq \quad -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \prec \pi \\
&\Longleftrightarrow \quad -1 \preceq -\frac{1}{4} + 2k \prec 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{-3}{4} \preceq 2k \prec \frac{5}{4} \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{-3}{8} \preceq k \prec \frac{5}{8}
\end{aligned}$$

et comme $k \in \mathbb{Z}$, alors $k = 0$. Donc : $x = -\frac{\pi}{4}$.
Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) dans $[-\pi, \pi[$ est :

$$S = \left\{-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right\}$$

Équations particulières

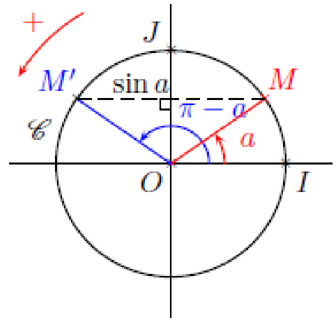
$$\begin{aligned}
\cos x &= 1 \iff x = 2k\pi \ /k \in \mathbb{Z} \\
\cos x &= -1 \iff x = \pi + 2k\pi \ /k \in \mathbb{Z} \\
\cos x &= 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Équation trigonométrique du type $\sin x = a$.

Propriété 9 *Soit a un réel.*
On considère l'équation (E_2) : $\sin x = a$.

- *Si : $|a| \succ 1$, il n'y a pas de solution.*
- *Si : $|a| \leq 1$, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $a = \sin\alpha$. L'équation devient alors $\sin x = \sin\alpha$ et on a donc :*

$$\left\{ \begin{array}{c} x = \alpha + 2k\pi \\ ou \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{array} \right. \quad /k \in \mathbb{Z}$$



Alors les solutions d'équation (E_2) dans $\mathbb{R}$ sont les réels : $\alpha + 2k\pi$ *ou* $\pi - \alpha + 2k\pi$ *tel que* $k \in \mathbb{Z}$.

Exemple 10 *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation :* $(E) : \sin x = \frac{1}{2}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
On a : $\frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$. *Donc*

$$\sin x = \sin\frac{\pi}{6} \iff \left\{\begin{array}{c} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ ou \\ x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. /k \in \mathbb{Z} \iff \left\{\begin{array}{c} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ ou \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. /k \in \mathbb{Z}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) *dans* $\mathbb{R}$ *est :*

$$S = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi/\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi/\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Exemple 11 *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation :* $(E) : \sin x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
On a : $\frac{-\sqrt{3}}{2} = -\sin\frac{\pi}{3} = \sin(\frac{-\pi}{3})$. *Donc*

$$\sin x = \sin(\frac{-\pi}{3}) \iff \left\{\begin{array}{c} x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ ou \\ x = \pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{array}\right. /k \in \mathbb{Z} \iff \left\{\begin{array}{c} x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ ou \\ x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \end{array}\right. /k \in \mathbb{Z}$$

Alors l'ensemble des solutions de l'équation (E) *dans* $\mathbb{R}$ *est :*

$$S = \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi/\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi/\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Exemple 12 *Résoudre dans* $[-\pi, \pi[$ *l'équation :* $(E) : \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Soit $x \in [-\pi, \pi[$.
On a : $\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4}$. *Donc*

$$\sin x = \sin\frac{\pi}{4} \iff \left\{\begin{array}{c} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ ou \\ x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{array}\right. /k \in \mathbb{Z} \iff \left\{\begin{array}{c} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ ou \\ x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{array}\right. /k \in \mathbb{Z}$$

Cherchons parmi ces solutions ceux qui appartiennent à l'intervalle $[-\pi, \pi[$.

Donc

$$\begin{aligned} -\pi &\preceq \frac{\pi}{4}+2k\pi \prec \pi \\ &\Longleftrightarrow -1 \preceq \frac{1}{4}+2k \prec 1 \\ &\Longleftrightarrow \frac{-5}{4} \preceq 2k \prec \frac{3}{4} \\ &\Longleftrightarrow \frac{-5}{8} \preceq k \prec \frac{3}{8} \end{aligned}$$

et comme $k \in \mathbb{Z}$, *alors* $k = 0$. *Donc :* $x = \frac{\pi}{4}$.
De même on a : $k = 0$. *Donc :* $x = \frac{3\pi}{4}$.
Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) *dans* $[-\pi, \pi[$ *est :*

$$S = \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\}$$

Équations particulières

$$\begin{aligned} \sin x &= 0 \Longleftrightarrow x = k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z} \\ \sin x &= 1 \Longleftrightarrow x = \frac{\pi}{2}+2k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z} \\ \sin x &= -1 \Longleftrightarrow x = -\frac{\pi}{2}+2k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Équation trigonométrique du type $\tan x = a$.

Propriété 13 *Soit* a *un réel.*
On considère l'équation $(E_3) : \tan x = a$, *il existe* α *dans* $\mathbb{R}$ *tel que :* $a = \tan\alpha$. *L'équation devient alors* $\tan x = \tan\alpha$ *et on a donc :* $x = \alpha + k\pi$ *avec* $k \in \mathbb{Z}$. *Alors les solutions d'équation* (E_3) *dans* $\mathbb{R}$ *sont les réels :* $\alpha+\ k\pi$ *,tel que* $k \in \mathbb{Z}$.

Exemple 14 *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation* $(E) : \tan x = 1$.
Soit x *un réel tel que :* $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ *avec* $k \in \mathbb{Z}$.
On a : $1 = \tan\frac{\pi}{4}$. *Donc*

$$\tan x = \tan\frac{\pi}{4} \Longleftrightarrow x = \frac{\pi}{4}+k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) *est :*

$$S = \left\{ \frac{\pi}{4}+k\pi / \ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Exemple 15 *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation* $(E) : \tan x = \frac{-\sqrt{3}}{3}$.
Soit x *un réel tel que :* $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ *avec* $k \in \mathbb{Z}$.
On a : $\frac{-\sqrt{3}}{3} = -\tan\frac{\pi}{6} = \tan(\frac{-\pi}{6})$. *Donc*

$$\tan x = \tan(\frac{-\pi}{6}) \Longleftrightarrow x = -\frac{\pi}{6}+k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) *est :*

$$S = \left\{ -\frac{\pi}{6}+k\pi / \ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Inéquations trigonométriques

Inéquations : $\sin x \geq a$ et $\sin x \leq a$

Exemple 16 *Résoudre dans l'intervalle* $[0, 2\pi[$ *l'inéquation* $(I) : \sin x \geq \frac{1}{2}$.

On commence par résoudre dans $[0, 2\pi[$ *l'équation :* $\sin x = \frac{1}{2}$.

On a : $\frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$. *Donc*

$$\sin x = \frac{1}{2} \iff \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \iff \left\{ \begin{array}{c} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ ou \\ x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{array} \right. \ / \ k \in \mathbb{Z} \iff \left\{ \begin{array}{c} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ ou \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{array} \right. \ / \ k \in \mathbb{Z}$$

On cherche les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[0, 2\pi[$.

$$\begin{aligned} 0 \quad \preceq & \quad \frac{\pi}{6} + 2k\pi \prec 2\pi \\ \iff & \quad \frac{-1}{6} \preceq 2k \prec 2 - \frac{1}{6} \\ \iff & \quad \frac{-1}{6} \preceq 2k \prec \frac{11}{6} \\ \iff & \quad \frac{-1}{12} \preceq k \prec \frac{11}{12} \end{aligned}$$

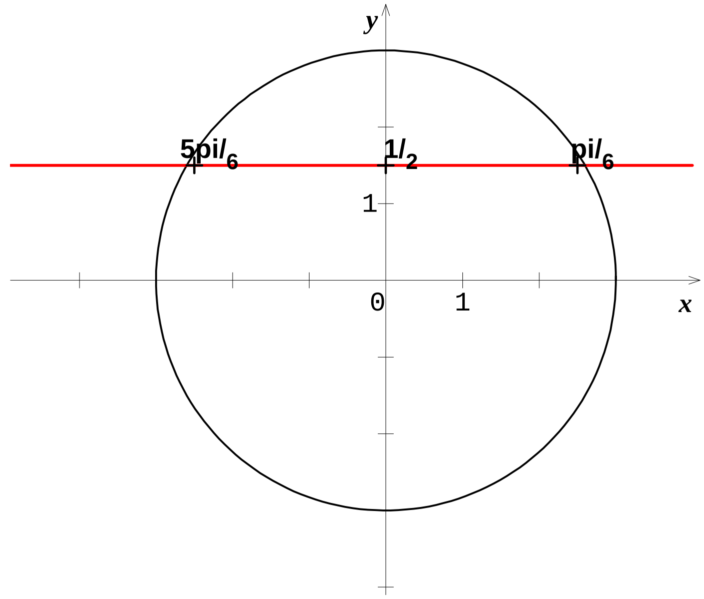
et comme $k \in \mathbb{Z}$, *alors* $k = 0$. *Donc :* $x = \frac{\pi}{6}$.

De même

$$\begin{aligned} 0 \quad \preceq & \quad \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \prec 2\pi \\ \iff & \quad -\frac{5}{6} \preceq 2k \prec 2 - \frac{5}{6} \\ \iff & \quad -\frac{5}{6} \preceq 2k \prec \frac{7}{6} \\ \iff & \quad -\frac{5}{12} \preceq k \prec \frac{7}{12} \end{aligned}$$

et comme $k \in \mathbb{Z}$, *alors* $k = 0$. *Donc :* $x = \frac{5\pi}{6}$. *Ce qui signifie que les solutions de l'équation sur l'intervalle* $[0, 2\pi[$ *sont :* $\frac{\pi}{6}$ *et* $\frac{5\pi}{6}$.

Donc



D'après le cercle trigonométrique l'ensemble des solutions d'inéquation (I) *sur l'intervalle* $[0, 2\pi[$ *est :*

$$S = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$$

Exemple 17 *Résoudre dans* $[-\pi, \pi]$ *l'inéquation suivante* $(I) : \sin x \prec \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Les solutions d'équation $(E) : \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ *sur l'intervalle* $[-\pi, \pi]$ *sont :* $\frac{\pi}{3}$ *et* $\frac{2\pi}{3}$.

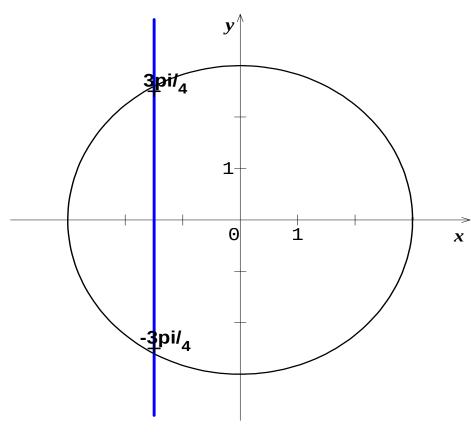
D'après le cercle trigonométrique l'ensemble des solutions d'inéquation (I) *sur l'intervalle* $[-\pi, \pi]$ *est :*

$$S = \left[-\pi, \frac{\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$$

Inéquations : $\cos x \geq a$ et $\cos x \leq a$

Exemple 18 *Résoudre dans l'intervalle* $]-\pi, \pi]$ *l'inéquation suivante :* $(I) : \cos x \leq \frac{-\sqrt{2}}{2}$.

Les solutions d'équation $(E) : \cos x = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ *sur l'intervalle* $]-\pi, \pi]$ *sont :* $\frac{-3\pi}{4}$ *et* $\frac{3\pi}{4}$.

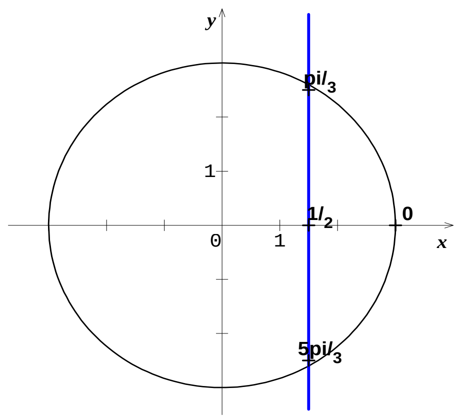


D'après le cercle trigonométrique l'ensemble des solutions d'inéquation (I) sur l'intervalle $]-\pi, \pi]$ est :

$$S = \left]-\pi, \frac{-3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$$

Exemple 19 *Résoudre dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ l'inéquation suivante : $(I) : \cos x \geq \frac{1}{2}$.*

Les solutions d'équation $(E) : \cos x = \frac{1}{2}$ sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ sont : $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{5\pi}{3}$.



D'après le cercle trigonométrique l'ensemble des solutions d'inéquation (I) sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ est :

$$S = \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$$

Inéquations : $\tan x \geq a$ et $\tan x \leq a$

Exemple 20 *Résoudre dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$ l'inéquation suivante : $(I) : \tan x \leq \sqrt{3}$.*

L'inéquation existe si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Les solutions d'équation $(E) : \tan x = \sqrt{3}$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ sont : $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{-2\pi}{3}$.

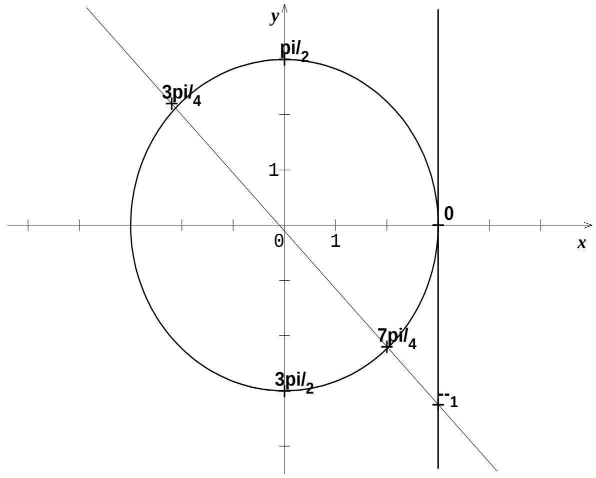
D'après le cercle trigonométrique l'ensemble des solutions d'inéquation (I) sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ est :

$$S = \left[-\pi, \frac{-2\pi}{3}\right] \cup \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

Exemple 21 *Résoudre dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ l'inéquation suivante : $(I) : \tan x \succ -1$.*

L'inéquation existe si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Les solutions d'équation $(E) : \tan x = -1$ *sur l'intervalle* $[0, 2\pi]$ *sont :* $\frac{3\pi}{4}$ *et* $\frac{7\pi}{4}$



D'après le cercle trigonométrique l'ensemble des solutions d'inéquation (I) *sur l'intervalle* $[0, 2\pi]$ *est :*

$$S = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$$

Exercice d'application 22 .

On considère dans $\mathbb{R}$ *l'équation*

$$(E) : \tan x - \sin x = 1 - \tan x . \sin x$$

1. *Déterminer* D *l'ensemble de définition de l'équation* (E) .
2. *Résoudre dans* D *l'équation* (E) .
3. *Déterminer les solutions d'équation* (E) *qui appatiennent à l'ensemble* $D \cap \left[\frac{-41\pi}{3}, \frac{-35\pi}{3}\right]$.

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude – generale.com