www.etude-generale.com **TCSI**
Matière : Mathématiques
Professeur : Yahya MATIOUI

Correction devoir surveillé N2

Exercice 1 (2 *points*)

1. *L'ensemble de définition de la fonction :* $f(x) = \frac{2x}{x^2-6x+5}$

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / \ x^2 - 6x + 5 \neq 0\right\}$$

On résout dans $\mathbb{R}$ *l'équation :* $x^2 - 6x + 5 = 0$.

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-6)^2 - 4 \times 1 \times 5 \\ &= 16 \succ 0 \end{aligned}$$

Donc, l'équation admet deux solutions réelles distinctes x_1 *et* x_2.

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6+\sqrt{16}}{2 \times 1} = 5 \quad et \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6-\sqrt{16}}{2 \times 1} = 1$$

Donc

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R} / \ \ x \neq 1 \ et \ x \neq 5\} \\ &=]-\infty, 1[\cup]1, 5[\cup]5, +\infty[\end{aligned}$$

2. *Soit* f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f(x) = -3x^2 + 2x + 1$.
On a : $a = -3$, $b = 4$ *et* $c = 1$ *et comme :* $\frac{-b}{2a} = \frac{2}{3}$ *et* $a \prec 0$. *Donc, on déduit le tableau de variations suivant :*

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
f	↗	$\frac{7}{3}$	↘

On déduit que la fonction f *admet* $\frac{7}{3}$ *comme valeur maximale en point d'abscisse* $\frac{2}{3}$ *sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 2 (8 *points*)

On considère les fonctions numériques f *et* h *définies par :* $f(x) = -2x^2 + 4x - 1$ *et* $h(x) = \frac{x}{x-1}$.

1. • *L'ensemble de définition de la fonction h :*

$$\begin{aligned} D_h &= \{x \in \mathbb{R} / \ x - 1 \neq 0\} \\ &=]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[\end{aligned}$$

• *Tableau de variations de h :*

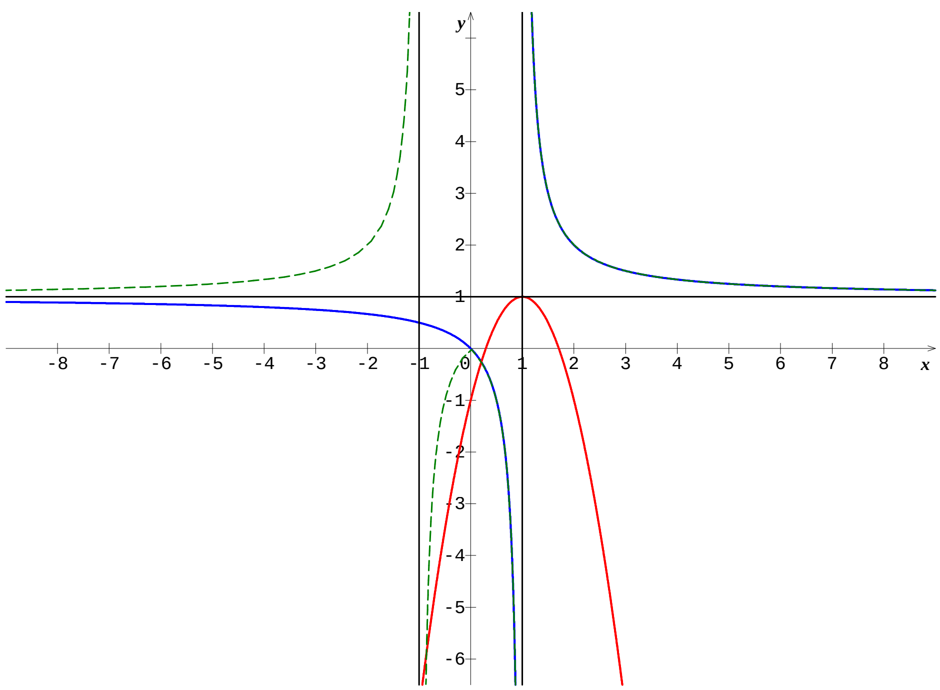
On a : $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \prec 0$. *Donc :*

x	$-\infty$	1	$+\infty$
h	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$

b) *La courbe représentative de la fonction h est appelée hyperbole son centre de symétrie est le point $S(1,1)$ et les droites d'équations : $(D) : x = 1$ et $(D') : y = 1$ sont les deux asymptotes de la courbe (C_h).*

c) *On a :* $h\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}-1} = 3$, $h(2) = \frac{2}{2-1} = 2$ *et* $h(3) = \frac{3}{3-1} = \frac{3}{2}$.

La courbe en bleu présente la fonction h.



2. **a)** *On a :* $a = -2 \prec 0$ *et* $\frac{-b}{2a} = \frac{-4}{-4} = 1$. *Donc le tableau de variations de la fonction*

est :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f		$\nearrow$	1	$\searrow$	

- *La courbe représentative de la fonction f est appelée parabole de sommet $S\,(1,1)$ et la droite d'équation $(D) : x = 1$ son axe de symétrie.*

b) *On a : $f\,(0) = -1$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ et $f\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{8}$.*
Voir la question $1/c$ la courbe en rouge présente la fonction f.

c) *Les solutions de l'équation $(E) : f\,(x) = m$ avec $m \in \mathbb{R}$.*

- *Si $m \in \left]1, +\infty\right[$, alors l'équation (E) n'admet aucune solution.*
- *Si $m \in \left]-\infty, 1\right[$, alors l'équation (E) admet deux solutions distinctes.*
- *Si $m = 1$, alors l'équation (E) admet une unique solution.*

3. On considère la fonction numérique g définie par : $g\,(x) = h\,(|x|) = \frac{|x|}{|x|-1}$

a) *L'ensemble de définition de la fonction g.*

$$D_g = \{x \in \mathbb{R}/ \quad |x| - 1 \neq 0\}$$

On résout l'équation : $|x| - 1 = 0$.

$$\begin{aligned} |x| - 1 &= 0 \iff |x| = 1 \\ &\iff x = 1 \quad ou \quad x = -1 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} D_g &= \{x \in \mathbb{R}/ \quad x \neq 1 \quad et \quad x \neq -1\} \\ &= \left]-\infty, -1\right[\cup \left]-1, 1\right[\cup \left]1, +\infty\right[\end{aligned}$$

b) • *La parité de la fonction g .*
Pour tout $x \in Dg$ on a : $-x \in D_g$ $\quad (1)$
Soit $x \in D_g$, calculons $g(-x)$:

$$g(-x) = \frac{|-x|}{|-x| - 1} = \frac{|x|}{|x| - 1} = g(x) \qquad (2)$$

D'après (1) et (2) on déduit que la fonction g est paire.

- *Soit $x \in [0, 1[\cup]1, +\infty[$, alors $|x| = x$. Donc on obtient :*

$$g(x) = \frac{|x|}{|x| - 1} = \frac{x}{x - 1} = h(x)$$

c) *Le tableau de variations de la fonction g.*

On a : $g(x) = h(x)$ pour tout x de $[0,1[\cup]1,+\infty[$. Ceci signifie que la monotonie de la fonction g sur les intervalles $[0,1[$ et $]1,+\infty[$ est la même que la fonction h, puis en utilisant la parité de la fonction g on déduit la monotonie sur les intervalles $]-\infty,-1[$ et $]-1,0]$. On obtient donc :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
g		$\nearrow$	$\parallel$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\parallel$	$\searrow$	

d) *Voir la question 1/c. La courbe en vert présente la fonction g.*

Exercice 3 (6 *points*)

1. *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs tels que : $\left(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}}\right) \equiv \frac{88\pi}{3}\,[2\pi]$.*

   On cherche la mesure principale de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}}\right)$.

   On a : $\left(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}}\right) = \frac{88\pi}{3} + 2k\pi$, tel que $k \in \mathbb{Z}$. Pour déterminer la mesure principale de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}}\right)$ il suffit de trouver la valeur de $k \in \mathbb{Z}$ telle que : $-\pi \prec \frac{88\pi}{3} + 2k\pi \preceq \pi$. C'est équivaux à

$$\begin{aligned}
-\pi \quad \prec \quad & \frac{88\pi}{3} + 2k\pi \preceq \pi \\
\Longleftrightarrow \quad & -1 \prec \frac{88}{3} + 2k \preceq 1 \\
\Longleftrightarrow \quad & -1 - \frac{88}{3} \prec 2k \preceq 1 - \frac{88}{3} \\
\Longleftrightarrow \quad & -\frac{91}{3} \prec 2k \preceq -\frac{85}{3} \\
\Longleftrightarrow \quad & \frac{-91}{6} \prec k \preceq \frac{-85}{6}
\end{aligned}$$

   et comme $k \in \mathbb{Z}$, alors $k = -15$.
   Donc : $\frac{88\pi}{3} + 2k\pi = \frac{88\pi}{3} - 30\pi = -\frac{2\pi}{3} \in]-\pi,\pi]$. Ceci signifie que la mesure principale de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}}\right)$ est : $-\frac{2\pi}{3}$.

2. • *Simplifions l'expression A :*

$$\begin{aligned}
A &= \cos(x+4\pi) + \cos(5\pi + x) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \cos(x - \pi) \\
&= \cos x + \cos(\pi + 4\pi + x) - \cos x + \cos x \\
&= \cos x + \cos(\pi + x) \\
&= \cos x - \cos x = 0
\end{aligned}$$

- *La somme B.*

$$A = \cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}$$

Simplifions : $\cos\frac{4\pi}{7}$, $\cos\frac{5\pi}{7}$ *et* $\cos\frac{6\pi}{7}$.

$$\cos\frac{4\pi}{7} = \cos(\frac{7\pi - 3\pi}{7}) = \cos(\pi - \frac{3\pi}{7}) = -\cos\frac{3\pi}{7}$$

et

$$\cos\frac{5\pi}{7} = \cos(\frac{7\pi - 2\pi}{7}) = \cos(\pi - \frac{2\pi}{7}) = -\cos\frac{2\pi}{7}$$

encore :

$$\cos\frac{6\pi}{7} = \cos(\frac{7\pi - \pi}{7}) = \cos(\pi - \frac{\pi}{7}) = -\cos\frac{\pi}{7}$$

. *Donc, la somme devient :*

$$\begin{aligned} A &= \cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} - \cos\frac{3\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} - \cos\frac{\pi}{7} \\ &= 0 \end{aligned}$$

3. a) *La valeur de la somme* $A = \cos^2\frac{\pi}{10} + \cos^2\frac{4\pi}{10} + \cos^2\frac{6\pi}{10} + \cos^2\frac{9\pi}{10}$

$$A = \cos^2\frac{\pi}{10} + \cos^2\frac{4\pi}{10} + \cos^2\frac{6\pi}{10} + \cos^2\frac{9\pi}{10}$$

Simplifions : $\cos^2\frac{6\pi}{10}$ *et* $\cos^2\frac{9\pi}{10}$:

$$\cos^2\frac{6\pi}{10} = \cos^2(\frac{5\pi + \pi}{10}) = \cos^2(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}) = \sin^2\frac{\pi}{10} \quad \textit{et} \quad \cos^2\frac{9\pi}{10} = \cos^2(\frac{5\pi + 4\pi}{10}) = \cos^2(\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{10}) = \sin^2\frac{4\pi}{10}$$

Donc, la somme devient

$$\begin{aligned} A &= \cos^2\frac{\pi}{10} + \cos^2\frac{4\pi}{10} + \sin^2\frac{\pi}{10} + \sin^2\frac{4\pi}{10} \\ &= \cos^2\frac{\pi}{10} + \sin^2\frac{\pi}{10} + \cos^2\frac{4\pi}{10} + \sin^2\frac{4\pi}{10} \\ &= 2 \end{aligned}$$

b) *On déduit la valeur de la somme B.*

On a : $B = \sin^2\frac{\pi}{10} + \sin^2\frac{4\pi}{10} + \sin^2\frac{6\pi}{10} + \sin^2\frac{9\pi}{10}$. *Donc :*

$$\begin{aligned} A + B &= \left(\cos^2\frac{\pi}{10} + \sin^2\frac{\pi}{10}\right) + \left(\cos^2\frac{4\pi}{10} + \sin^2\frac{4\pi}{10}\right) + \left(\cos^2\frac{6\pi}{10} + \sin^2\frac{6\pi}{10}\right) + \left(\cos^2\frac{9\pi}{10} + \sin^2\frac{9\pi}{10}\right. \\ &= 4 \end{aligned}$$

Ce qui signifie que : $B = 2$.

Exercice 4 (4 *points*)

Soit f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}^*$ *par :* $f(x) = x + \frac{9}{x}$.

1. *Soient x et y deux éléments distincts de $\mathbb{R}^*$, montrons que :* $T(x,y) = \frac{xy-9}{xy}$

$$\begin{aligned}
T(x,y) &= \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \\
&= \frac{x+\frac{9}{x}-\left(y+\frac{9}{y}\right)}{x-y} \\
&= \frac{x-y+\frac{9}{x}-\frac{9}{y}}{x-y} \\
&= \frac{x-y+\frac{9y-9x}{xy}}{x-y} \\
&= \frac{\frac{xy(x-y)}{xy}+\frac{9(y-x)}{xy}}{x-y} \\
&= \frac{xy(x-y)+9(y-x)}{xy(x-y)} \\
&= \frac{xy(x-y)-9(x-y)}{xy(x-y)} \\
&= \frac{(x-y)(xy-9)}{xy(x-y)} \\
&= \frac{xy-9}{xy}
\end{aligned}$$

2. • *La monotonie de la fonction f sur l'intervalle* $]0,3]$.

   Soient x et y deux éléments de $]0,3]$ tels que : $x \neq y$.

   On a : $0 \prec x \preceq 3$ *et* $0 \prec y \preceq 3$. *Donc :* $0 \prec xy \preceq 9$ *et comme* $x \neq y$ *alors :* $0 \prec xy \prec 9$.

   Ensuite : $-9 \prec xy-9 \prec 0$. *Ceci signifie que :* $xy-9 \prec 0$.

   D'autre part, on sait que : $xy \succ 0$. *Donc on déduit que :* $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \prec 0$. *D'où la fonction f est strictement décroissante sur* $]0,3]$.

   • *Soit a un élément de $[1,2]$. On a :* $1 \leq a \leq 2$, *et comme la fonction f est strictement décroissante sur $]0,3]$. Donc :* $f(2) \leq f(a) \leq f(1)$, $([1,2] \subset]0,3])$ *et comme* $f(2) = \frac{13}{2}$ *et* $f(1) = 10$, *alors :*

$$\frac{13}{2} \leq f(a) \leq 10 \quad , \text{ pour tout } a \text{ de } [1,2]$$

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude – generale.com