2éme Bac PC-SVT
www.etude-generale.com

www.etude-generale.com
Matière : Mathématiques
Professeur : Yahya MATIOUI

Fonction exponentielle

1 Définition et résultats

Définition 1 *La fonction réciproque de la fonction* ln *s'appelle la fonction exponentielle est notée* exp, *et*

$$\begin{array}{cccc} \exp & \mathbb{R} & \longrightarrow &]0,+\infty[\\ & x & \longmapsto & \exp x \end{array}$$

avec $\exp(0) = 1$.

Notation nouvelle :
$\exp x = \exp(x \times 1) = (\exp(1))^x = e^x$. *On note pour tout* x *réel, on a*

$$\exp x = e^x$$

Résultats

- *La fonction exponentielle est définie sur l'ensemble* $\mathbb{R}$.
- *La fonction exponentielle est continue et dérivable sur* $\mathbb{R}$, *et on a* : $(e^x)' = e^x$.
- *La fonction exponentielle est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$.
- $(\forall x \in \mathbb{R})$, $e^x \succ 0$

2 Propriétés

Propriété 2 *Pour tous les nombres réels x et y, et l'entier naturel n, on a :*

1. $e^0 = 1$ *et* $e^1 \backsimeq 2,718$
2. $e^{x+y} = e^x \times e^y$
3. $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$
4. $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
5. $(e^x)^n = e^{nx}$
6. $e^x \neq 0$

Remarque 3 (***Lien avec le logarithme népérien***)

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ \ln(e^x) = x.$
2. $\forall x \in \left]0, +\infty\right[,\ e^{\ln x} = x.$

Propriété 4 1. $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall a \in]0, +\infty[),\ e^x = a \iff x = \ln a$

2. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ e^x = e^y \iff x = y$
3. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ e^x \prec e^y \iff x \prec y$

Exemple 5 • *Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $e^{2x^2+3} = e^{7x}$.*

$$e^{2x^2+3} = e^{7x} \iff 2x^2 + 3 = 7x \iff 2x^2 - 7x + 3 = 0$$

Calculons le discriminant Δ de l'équation du second degré.

$$\Delta = 49 - 24 = 25 \succ 0$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7+5}{4} = 3 \quad et \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7-5}{4} = \frac{1}{2}$$

donc

$$S = \left\{\frac{1}{2}, 3\right\}$$

• *Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{R}$ l'inéquation (I) : $e^{3x} \leq e^{x+6}$.*

$$e^{3x} \leq e^{x+6} \iff 3x \prec x + 6 \iff x \prec 3$$

donc

$$S = \left]-\infty, 3\right[$$

3 Limites de références

Propriété 6 *Soit $n \in \mathbb{N}$.*

1. $\lim_{x \longrightarrow +\infty} e^x = +\infty$.
2. $\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ *et* $\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$.
3. $\lim_{x \longrightarrow -\infty} e^x = 0$.
4. $\lim_{x \longrightarrow -\infty} xe^x = 0$ *et* $\lim_{x \longrightarrow -\infty} x^n e^x = 0$.
5. $\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Exemple 7 *Calculer les limites suivantes :*

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} (x + e^{-3x}) \quad , \quad \lim_{x \longrightarrow -\infty} e^{1-\frac{1}{x}} \quad et \quad \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{e^x + x}{e^x - x^2}$$

- *Calculons la limite* : $\lim_{x \longrightarrow +\infty} (x + e^{-3x})$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \longrightarrow +\infty} (x + e^{-3x}) &= +\infty + 0 = +\infty \\ Car &: \lim_{x \longrightarrow +\infty} e^{-3x} = 0 \end{aligned}$$

- *Calculons la limite* : $\lim_{x \longrightarrow -\infty} e^{1-\frac{1}{x}}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \longrightarrow -\infty} e^{1-\frac{1}{x}} &= e \\ Car &: \lim_{x \longrightarrow -\infty} (1 - \frac{1}{x}) = 1 \end{aligned}$$

- *Calculons la limite* : $\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{e^x + x}{e^x - x^2}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{e^x + x}{e^x - x^2} &= \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{e^x(1 + \frac{x}{e^x})}{e^x(1 - \frac{x^2}{e^x})} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{x}{e^x}}{1 - \frac{x^2}{e^x}} \\ Comme &: \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} = 0. \ car \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \\ et \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} &= \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x^2}} = 0. \ car \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty \end{aligned}$$

alors

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{e^x + x}{e^x - x^2} = 1$$

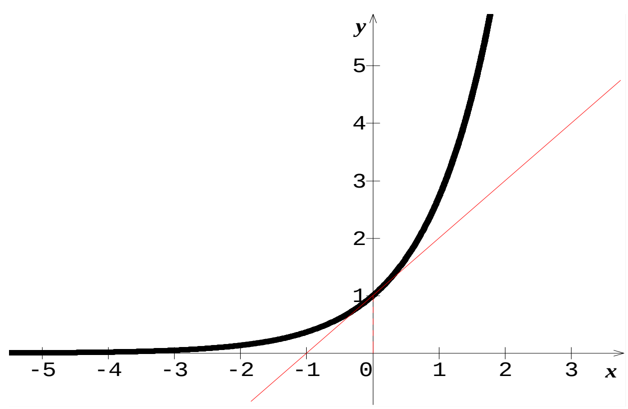
4 Courbe représentative de la fonction exponentielle

D'après les résultats obtenus dans le premier paragraphe, on déduit le tableau de variations de la fonction exponentielle ainsi sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$:

$$\begin{array}{cccc} f & \mathbb{R} & \longrightarrow &]0, +\infty[\\ & x & \longmapsto & e^x \end{array}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	0	1	$+\infty$

La courbe représentative de la fonction exponentielle.



5 Fonction de la forme $x \longmapsto e^{u(x)}$

5.1 Dérivée de la fonction e^u.

Propriété 8 *Soit la fonction u dérivable sur un intervalle I, alors la fonction e^u est dérivable sur I et :*

$$(e^u)' = u'e^u$$

Exemple 9 *Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{2x-1}$ et $g(x) = e^{-x^2}$.*

f et g sont dérivable sur $\mathbb{R}$, donc $f'(x) = 2e^{2x-1}$ et $g'(x) = -2xe^{-x^2}$.

Propriété 10 *Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. Les fonctions u et e^u ont le même sens de variations.*

5.2 Primitives

Propriété 11 *Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.*

L'ensemble des fonctions primitives de la fonction $u'e^u$ sur I sont les fonctions $e^u + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Exemple 12 *On considère la fonction f définie sur $]-1, +\infty[$ par :*

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} e^{\sqrt{x+1}}$$

La fonction f est continue sur $]-1, +\infty[$, elle admet donc des fonctions primitives sur $]-1, +\infty[$.

f est de la forme $u'e^u$ avec $u(x) = \sqrt{x+1}$ et $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ pour tout $x \in]-1, +\infty[$.

On a

$$f(x) = (\sqrt{x+1})' e^{\sqrt{x+1}}$$

donc

$$F(x) = e^{\sqrt{x+1}} + k, \ (k \in \mathbb{R})$$

6 Exercice d'application

Exercice 13 *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f(x) = xe^{\frac{-x}{2}}$$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. *Calculer :* $\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x)$ *et* $\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x)$.
2. *Calculer la dérivée de la fonction f, et dresser le tableau de variations de la fonction f.*
3. *Tracer la courbe représentative de la fonction f.*

Solution 14 1. *La limite de la fonction f en $+\infty$.*

$$\begin{aligned}
\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \longrightarrow +\infty} xe^{\frac{-x}{2}} \\
&= \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x}{e^{\frac{x}{2}}} \\
&= \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{2\frac{x}{2}}{e^{\frac{x}{2}}} \\
&= \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{2}{\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}}} = 0 \\
car &: \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} = +\infty
\end{aligned}$$

La limite de la fonction f en $-\infty$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \longrightarrow -\infty} xe^{\frac{-x}{2}} = -\infty \\
car &: \lim_{x \longrightarrow -\infty} e^{\frac{-x}{2}} = +\infty \quad et \lim_{x \longrightarrow -\infty} x = -\infty.
\end{aligned}$$

2. *Justifions d'abord la dérivabilité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.*

   La fonction f s'écrit comme le produit de deux fonctions u et v.

$$u(x) = x \quad et \quad v(x) = e^{\frac{-x}{2}}$$

* u *est une fonction polynôme dérivable sur* $\mathbb{R}$.
  On pose h *la fonction définie par :* $h : x \longmapsto \frac{-x}{2}$.
* h *est une fonction polynôme dérivable sur* $\mathbb{R}$, *donc la fonction* v *est dérivable sur* $\mathbb{R}$.
  On déduit que la fonction f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *comme le produit de deux fonctions dérivables.*

Calculons $f'(x)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

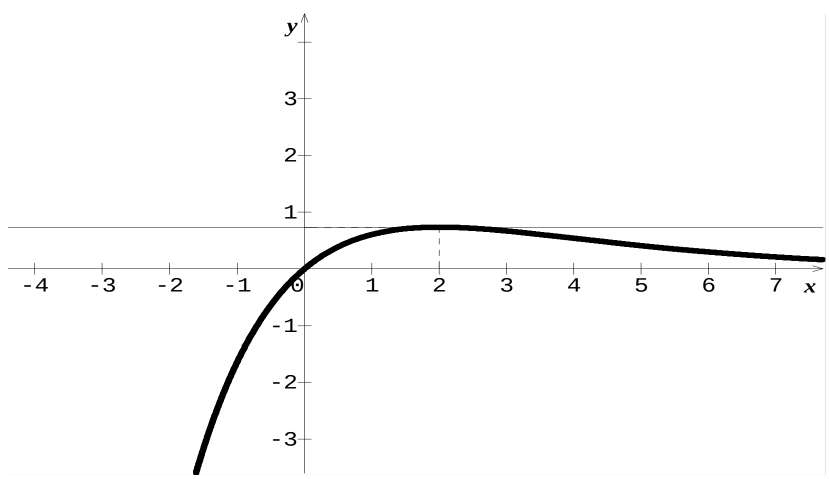
$$\begin{aligned} f'(x) &= (xe^{\frac{-x}{2}})' \\ &= e^{\frac{-x}{2}} + x \times (\frac{-1}{2})e^{\frac{-x}{2}} \\ &= (1 - \frac{x}{2})e^{\frac{-x}{2}} \end{aligned}$$

Comme $e^{\frac{-x}{2}} \succ 0$, *alors le signe de* $f'(x)$ *sur* $\mathbb{R}$ *est celui de* $(1 - \frac{x}{2})$.

On dresse le tableau de variations :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{2}{e}$	$\searrow$	0

3. *La courbe représentative de la fonction* f.



7 La fonction exponentielle de base $a \in \mathbb{R}_+^*$

7.1 Définition et propriétés

Définition 15 *La fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $x \longmapsto e^{x \ln a}$ s'appelle la fonction exponentielle de base a, notée a^x.*

Propriété 16 *Pour tous réels x et y, on a :*

1. $a^{x+y} = a^x \times a^y$
2. $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$
3. $(a^x)^y = a^{xy}$
4. $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$.

Propriété 17 *Soit a un élément de $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.*

1. $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in]0, +\infty[)$, $a^x = y \iff x = \frac{\ln y}{\ln a}$.
2. $(\forall x \in \mathbb{R})$, $\log_a(a^x) = x$.

Exemple 18 *Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :* $4^x = 18$

$$4^x = 18 \iff x = \frac{\ln 18}{\ln 4}$$

donc

$$S = \left\{ \frac{\ln 18}{\ln 4} \right\}$$

8 L'étude de la fonction $x \longmapsto a^x$

Propriété 19 *La fonction $x \longmapsto a^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :* $(a^x)' = \ln a \times a^x$.

Propriété 20
1. *Si $a \succ 1$ alors la fonction $x \longmapsto a^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.*
2. *Si $0 \prec a \prec 1$ alors la fonction $x \longmapsto a^x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.*

3. *Si* $a \succ 1$ *alors* $\lim_{x \longrightarrow +\infty} a^x = +\infty$ *et* $\lim_{x \longrightarrow -\infty} a^x = 0$.

4. *Si* $0 \prec a \prec 1$ *alors* $\lim_{x \longrightarrow +\infty} a^x = 0$ *et* $\lim_{x \longrightarrow -\infty} a^x = +\infty$.

FIN

Pr : Yahya MATIOUI

www.etude – generale.com