2éme Bac PC-3
2020/2021

Lycée Al Kadi Ayad Salé
Matiére : Mathématiques
Professeur : Yahya MATIOUI

Devoir Surveillé N°3
16/01/2021
Durée 1H

Exercice 01 (9 *points*)

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 4 \quad et \quad u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 3 \ ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1. *Montrer par récurrence que :* $u_n \prec 5$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. (1,5 *pts*)
2. *Vérifier que :* $u_{n+1} - u_n = \frac{3}{5}(5 - u_n)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, puis déduire la monotonie de la suite* (u_n). (2 *pts*)
3. *Déduire que la suite* (u_n) *est convergente.* (1 *pt*)
4. *Soit* (v_n) *la suite numérique telle que :* $v_n = 5 - u_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
   - **a)** *Montrer que la suite* (v_n) *est géométrique et exprimer* v_n *en fonction de* n. (1,5
   - **b)** *Déduire que* $u_n = 5 - (\frac{2}{5})^n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, puis déterminer* $\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n$. (1,5
   - **c)** *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*,on pose :* $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$*, considérons la suite* $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ *définie par :* $\mathbf{w}_n = \frac{3S_n}{5}$. *Montrer que* $\lim_{n \longrightarrow +\infty} w_n = 1$. (1,5 *pts*)

Exercice 02 (10 *points*)

Soit f *la fonction définie sur* $]0, +\infty[$ *par :*

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$$

1. *Calculer* $\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x)$.
2. *Justifier la dérivabilité de la fonction* f *sur* $]0, +\infty[$*, puis montrer que pour tout* $x \in]0, +\infty[$ *on a* (1,5 *pts*)
$$f'(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{2x^2}$$
3. *Déduire la monotonie de la fonction* f *sur* $[2, 3]$*, puis montrer que :* $f([2, 3]) \subset [2, 3]$.
4. *Montrer que :* $(\forall x \in [2, 3])$; $f(x) \leq x$. (1 *pt*)
5. *On considére la suite* (u_n) *définie par :* $u_0 = 3$ *et* $u_{n+1} = f(u_n)$; $\forall n \in \mathbb{N}$
   - **a)** *Montrer par récurrence que :* $(\forall n \in \mathbb{N})$; $2 \leq u_n \leq 3$. (1 *pt*)
   - **b)** *Montrer que la suite* (u_n) *est décroissante, puis déduire qu'elle est convergente.*
   - **c)** *Calculer* $\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n$. (2 *pts*)

Pr : Yahya MATIOUI