**Lycée Al Kadi Ayad Salé** — **2éme BAC PC**
**Matiére : Mathématiques** — **2020/2021**
**Professeur : Yahya MATIOUI** — **www.etude-generale.com**

**Devoir Surveillé N2**
**Durée 1H**
**01/04/2021**

**Problème d'analyse** (13 **points**)

**Partie** 01. *On considère la fonction numérique $h$ définie sur $\mathbb{R}$ par :* $h(x) = e^{-x} + x - 1$.

1. *Calculer $h'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, puis en déduire que $h$ est croissante sur $[0, +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty, 0]$.* $(2pts)$

2. *Montrer que $h(x) \geq 0$ pour tout $x$ de $\mathbb{R}$.* $(1pt)$

**Partie** 02 *On considère la fonction numérique $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :* $f(x) = \frac{x}{x+e^{-x}}$

1. *Montrer que :* $f'(x) = \frac{(x+1)e^{-x}}{(x+e^{-x})^2}$ *pour tout $x$ de $\mathbb{R}$.* $(1pt)$

2. *Etudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction $f$.* $(2pts)$

3. *Vérifier :* $x - f(x) = \frac{xh(x)}{h(x)+1}$ *pour tout $x$ de $\mathbb{R}$ puis étudier le signe de $x - f(x)$ sur $\mathbb{R}$.*

4. *Déduire de la question précédente que la courbe $(C_f)$ est au-dessous de la droite $(\Delta)$ d'équation : $y = x$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et au-dessus sur l'intervalle $]-\infty, 0]$.*

5. *On considère la suite $(u_n)$ définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

**a)** *Montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leq u_n \leq 1$. $(1pt)$

**b)** *Montrer que la suite $(u_n)$ est décroissante, puis montrer qu'elle est convergente.* (*Indication : on pourra utiliser le résultat de la question :* 3) $(1,5pts)$

**c)** *Montrer que :* $\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = 0$. $(1pt)$

**Exercice 1** (7 ***points***). *Le plan complexe est muni d'un repére orthonormé direct* $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

1. *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :* $(E) : 2z^2 + 2z + 5 = 0$. $(1,5pts)$

2. *On considére les points $A$, $B$ et $C$ d'affixes respectives :* $a = 2 - 2i$ , $b = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ *et* $c = 1 - \sqrt{3} + (1 + \sqrt{3})i$.

   **a)** *Ecrire sous la forme trigonométrique chacun des deux nombres complexes : $a$ et $b$.*

3. *On considére la rotation $R$ de centre le point $O$ et d'angle $\frac{5\pi}{6}$.*

   **a)** *Soit $z$ l'affixe d'un point $M$ du plan complexe et $z'$ l'affixe du point $M'$ l'image de $M$ par la rotation $R$.*
   *Montrer que : $z' = bz$, puis vérifier que le point $C$ est l'image du point $A$ par la rotation $R$.* $(2pts)$

4. *Montrer que :* $\arg(c) \equiv \arg(a) + \arg(b)\, [2\pi]$, *puis déduire un argument du nombre complexe $c$.* $(1,5pts)$