2éme Bac PC
2020/2021

etude-generale.com
Matiére : Mathématique
Professeur : Yahya MATIOUI

Correction du devoir surveillé N°2
31/12/2020
Durée 1H

Problème d'analyse

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = x - 2 - \sqrt{x^2 - 2x}$$

1. *Cherchons l'ensemble de définition D_f.*

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / \ x^2 - 2x \geq 0\right\}$$

On résout l'inéquation suivante : $x^2 - 2x \geq 0$

$$x^2 - 2x = 0 \iff x(x-2) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 2$$

Le tableau de signe.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$x(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$D_f = \left]-\infty, 0\right] \cup \left[2, +\infty\right[$$

a) *Calculons* $\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -\infty} x - 2 - \sqrt{x^2 - 2x} = -\infty - \infty = -\infty$$

$$Car \quad : \quad \begin{cases} \lim_{x \longrightarrow -\infty} x - 2 = -\infty \\ \lim_{x \longrightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 2x} = +\infty \end{cases}$$

b) *Etudions la branche infinie de la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$.*

Comme $\lim_{x\longrightarrow-\infty} f(x) = -\infty$, *calculons maintenant* $\lim_{x\longrightarrow-\infty} \frac{f(x)}{x}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow-\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\longrightarrow-\infty} \frac{x-2-\sqrt{x^2-2x}}{x} \\
&= \lim_{x\longrightarrow-\infty} 1-\frac{2}{x}-\frac{\sqrt{x^2-2x}}{x} \\
&= \lim_{x\longrightarrow-\infty} 1-\frac{2}{x}-\frac{\sqrt{x^2(1-\frac{2}{x})}}{x} \\
&= \lim_{x\longrightarrow-\infty} 1-\frac{2}{x}+\frac{x\sqrt{1-\frac{2}{x}}}{x} \\
&= \lim_{x\longrightarrow-\infty} 1-\frac{2}{x}+\sqrt{1-\frac{2}{x}} = 2
\end{aligned}$$

Calculons ensuite : $\lim_{x\longrightarrow-\infty} f(x) - 2x$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow-\infty} f(x)-2x &= \lim_{x\longrightarrow-\infty} x-2-\sqrt{x^2-2x}-2x \\
&= \lim_{x\longrightarrow-\infty} -x-2-\sqrt{x^2-2x} \\
&= \lim_{x\longrightarrow-\infty} -(x+2+\sqrt{x^2-2x}) \\
&= \lim_{x\longrightarrow-\infty} -(\frac{(x+2+\sqrt{x^2-2x})(x+2-\sqrt{x^2-2x})}{x+2-\sqrt{x^2-2x}}) \\
&= \lim_{x\longrightarrow-\infty} -(\frac{(x+2)^2-\sqrt{x^2-2x}^2}{x+2-\sqrt{x^2-2x}}) \\
&= \lim_{x\longrightarrow-\infty} -(\frac{x^2+4x+4-x^2+2x}{x+2-\sqrt{x^2-2x}}) \\
&= \lim_{x\longrightarrow-\infty} -(\frac{6x+4}{x+2+x\sqrt{1-\frac{2}{x}})}) \\
&= \lim_{x\longrightarrow-\infty} -(\frac{x(6+\frac{4}{x})}{x(1+\frac{2}{x}+\sqrt{1-\frac{2}{x}})}) \\
&= \lim_{x\longrightarrow-\infty} -\frac{6+\frac{4}{x}}{1+\frac{2}{x}+\sqrt{1-\frac{2}{x}}} = -3
\end{aligned}$$

Ce qui signifie que la courbe (C_f) *admet une asymptote oblique d'équation* $y = 2x-3$ *au voisinage de* $-\infty$.

c) *Calculons* $\lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow+\infty} x-2-\sqrt{x^2-2x} = +\infty-\infty \quad \text{(F.I)}$$

On utilise la conjugué

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x) &= \lim_{x\longrightarrow+\infty} x-2-\sqrt{x^2-2x} \\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{(x-2)^2-(x^2-2x)}{x-2+\sqrt{x^2-2x}} \\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{x^2-4x+4-x^2+2x}{x-2+\sqrt{x^2-2x}} \\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{-2x+4}{x(1-\frac{2}{x}+\sqrt{1-\frac{2}{x}})} \\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{x(-2+\frac{4}{x})}{x(1-\frac{2}{x}+\sqrt{1-\frac{2}{x}})} \\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{-2+\frac{4}{x}}{1-\frac{2}{x}+\sqrt{1-\frac{2}{x}}} = -1
\end{aligned}$$

La courbe (C_f) admet une asymptote horizontale d'équation $y=-1$ au voisinage de $+\infty$.

* *Étudions la dérivabilité de la fonction f à droite de 2.*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} &= \lim_{x\longrightarrow2^+} \frac{x-2-\sqrt{x^2-2x}-0}{x-2} \\
&= \lim_{x\longrightarrow2^+} \frac{x-2}{x-2}-\frac{\sqrt{x^2-2x}}{x-2} \\
&= \lim_{x\longrightarrow2^+} 1-\frac{x(x-2)}{(x-2)\sqrt{x^2-2x}} \\
&= \lim_{x\longrightarrow2^+} 1-\frac{x}{\sqrt{x^2-2x}} \\
&= 1-\frac{2}{0^+} = -\infty
\end{aligned}$$

Donc, la fonction f n'est pas dérivable à droite de 2.

La courbe (C_f) admet une demi-tangente en point $A(2,0)$ vers le bas.

* *Étudions la dérivabilité de la fonction f à gauche de 0.*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\longrightarrow 0^-}\frac{x-2-\sqrt{x^2-2x}+2}{x}\\
&= \lim_{x\longrightarrow 0^-}\frac{x-\sqrt{x^2-2x}}{x}\\
&= \lim_{x\longrightarrow 0^-} 1-\frac{\sqrt{x^2-2x}}{x}\\
&= \lim_{x\longrightarrow 0^-} 1+\frac{x\sqrt{1-\frac{2}{x}}}{x}\\
&= \lim_{x\longrightarrow 0^-} 1+\sqrt{1-\frac{2}{x}}=+\infty
\end{aligned}$$

Donc, la fonction f n'est pas dérivable à gauche de 0.

La courbe (C_f) admet une demi-tangente en point $B(0,-2)$ vers le bas.

a) *La fonction f est dérivable sur $]-\infty,0[\cup]2,+\infty[$. En effet, la fonction f s'écrit sous la forme d'une différence de deux fonctions u et v.*

$$u(x)=x-2 \quad et \quad v(x)=\sqrt{x^2-2x}$$

- *u est une fonction polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$ et surtout sur $]-\infty,0[\cup]2,+\infty[$. On pose la fonction h définie par $h: x\longmapsto x^2-2x$.*
- *h est une fonction polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$ et surtout sur $]-\infty,0[\cup]2,+\infty[$, et pour tout $x\in]-\infty,0[\cup]2,+\infty[$ on a*

$$h(x)\succ 0$$

Donc, la fonction v est dérivable sur $]-\infty,0[\cup]2,+\infty[$. Ce qui signifie que f est dérivable sur $]-\infty,0[\cup]2,+\infty[$.

Calculons maintenant $f'(x)$, pour tout $x\in]-\infty,0[\cup]2,+\infty[$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (x-2-\sqrt{x^2-2x})'\\
&= 1-\frac{(x^2-2x)'}{2\sqrt{x^2-2x}}\\
&= 1-\frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}}\\
&= 1-\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}\\
&= \frac{\sqrt{x^2-2x}-(x-1)}{\sqrt{x^2-2x}}
\end{aligned}$$

b) *On sait que pour tout $x\in]-\infty,0[\cup]2,+\infty[$, on a*

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x^2-2x}-(x-1)}{\sqrt{x^2-2x}}$$

* *Pour tout* $x \in]-\infty, 0[$.

$$x \prec 0 \implies x-1 \prec -1 \prec 0 \implies x-1 \prec 0 \quad \implies -(x-1) \succ 0.$$

et on sait que pour tout $x \in]-\infty, 0[$, *on a* $\sqrt{x^2-2x} \succ 0$. *Donc*

$$\sqrt{x^2-2x} - (x-1) \succ 0$$

Ensuite on obtient

$$\frac{\sqrt{x^2-2x} - (x-1)}{\sqrt{x^2-2x}} \succ 0$$

c'est-à-dire que pour tout $x \in]-\infty, 0[$, *on a*

$$f'(x) \succ 0$$

* *Pour tout* $x \in]2, +\infty[$.
On a

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\sqrt{x^2-2x} - (x-1)}{\sqrt{x^2-2x}} \\
&= \frac{\sqrt{x^2-2x}^2 - (x-1)^2}{\sqrt{x^2-2x}(\sqrt{x^2-2x} + (x-1))} \\
&= \frac{(x^2-2x-(x^2-2x+1))}{\sqrt{x^2-2x}(\sqrt{x^2-2x} + (x-1))} \\
&= \frac{-1}{\sqrt{x^2-2x}(\sqrt{x^2-2x} + (x-1))}
\end{aligned}$$

comme $x \in]2, +\infty[$, *alors* $x \succ 2$ *de plus* $x-1 \succ 0$, *et on sait que pour tout* $x \in]2, +\infty[$ *on a* $\sqrt{x^2-2x} \succ 0$.
Donc

$$\sqrt{x^2-2x}(\sqrt{x^2-2x} + (x-1)) \succ 0$$

Ce qui signifie que

$$\frac{-1}{\sqrt{x^2-2x}(\sqrt{x^2-2x} + (x-1))} \prec 0$$

C'est-à-dire que pour tout $x \in]2, +\infty[$

$$f'(x) \prec 0$$

c) *Tableau de variation de la fonction* f.
On a pour tout $x \in]2, +\infty[$, $f'(x) \prec 0$. *Ce qui signifie que la fonction* f *est strictement décroissante sur l'intervalle* $[2, +\infty[$.
D'autre part, on a pour tout $x \in]-\infty, 0[$, $f'(x) \succ 0$. *Ce qui signifie que la fonction* f *est strictement croissante sur l'intervalle* $]-\infty, 0]$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$				$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-2		0	↘	-1

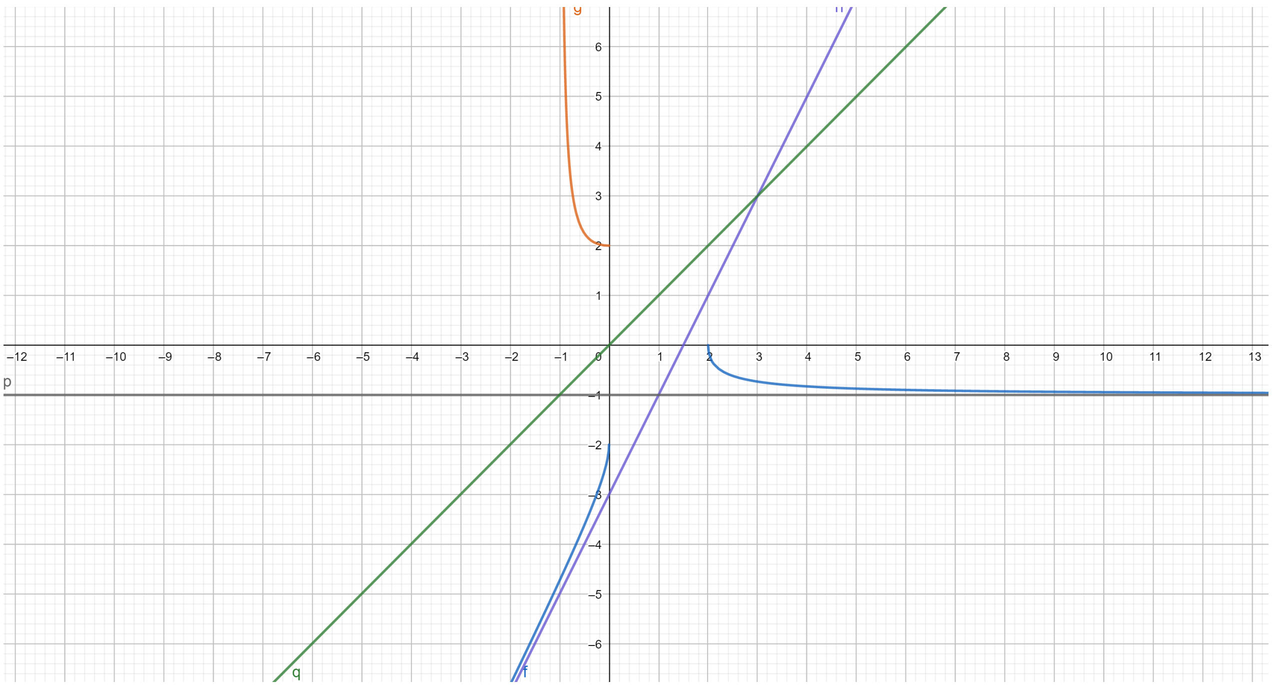
2. *On trace la courbe* (C_f) *dans un dans un repère orthonormé* $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

La courbe (C_f) *admet une asymptote oblique d'équation* $y = 2x - 3$ *au voisinage de* $-\infty$.

La courbe (C_f) *admet une asymptote horizontale d'équation* $y = -1$ *au voisinage de* $+\infty$.

La courbe (C_f) *admet une demi-tangente en point* $A(2, 0)$ *vers le bas.*

La courbe (C_f) *admet une demi-tangente en point* $B(0, -2)$ *vers le bas.*



3. *On considére la fonction* g *la restriction de la fonction* f *sur* $[2, +\infty[$.

$$g(x) = f(x) = x - 2 - \sqrt{x^2 - 2x}\,, \quad \forall x \in [2, +\infty[$$

a) *Montrons que* g *admet une fonction réciproque définie sur* J.

* *La continuité de* g *sur* $[2, +\infty[$.
la fonction g *s'écrit sous la forme d'une différence de deux fonctions* u *et* v.

$$u(x) = x - 2 \;\; et \;\; v(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$$

- u *est une fonction polynôme continue sur* $\mathbb{R}$ *et surtout sur* $[2, +\infty[$.
  On pose la fonction h *définie par* $h : x \longmapsto x^2 - 2x$.
- h *est une fonction polynôme continue sur* $\mathbb{R}$ *et surtout sur* $[2, +\infty[$, *et pour tout* $x \in [2, +\infty[$ *on a*

$$h(x) \succeq 0$$

Donc, la fonction v *est continue sur* $[2, +\infty[$. *Ce qui signifie que* f *est continue sur* $[2, +\infty[$.

$*$ *La fonction g est strictement décroissante sur* $[2,+\infty[$.

On conclut que la fonction g admet une fonction réciproque définie sur l'intervalle $J=f(I)=f([2,+\infty[)=]\lim_{x\longrightarrow+\infty}f(x),f(2)]=]-1,0]$.

b) *Calculons* $(g^{-1})'(2-2\sqrt{2})$.

On a : $g(4)=2-2\sqrt{2}$ *et* $g'(4)\neq 0$, *alors* g^{-1} *est dérivable en* $2-2\sqrt{2}$ *et on a*

$$(g^{-1})'(2-2\sqrt{2})=\frac{1}{g'(g^{-1}(2-2\sqrt{2}))}=\frac{1}{g'(4)}\text{ , car } g^{-1}(2-\sqrt{2})=4$$

et $g'(4)=\frac{\sqrt{(4)^2-2\times4}-(4-1)}{\sqrt{(4)^2-2\times4}}=\frac{\sqrt{8}-3}{\sqrt{8}}$, *donc on obtient*

$$(g^{-1})'(2-2\sqrt{2})=\frac{1}{g'(4)}=\frac{1}{\frac{\sqrt{8}-3}{\sqrt{8}}}=\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8}-3}$$

c) *Cherchons la fonction réciproque* g^{-1}.

$$\begin{cases} y=g(x) \\ x\in I\end{cases} \iff \begin{cases} g^{-1}(y)=x \\ y\in J\end{cases}$$

Soit $y\in]-1,0]$.

$$\begin{aligned} y &= g(x) \iff y=x-2-\sqrt{x^2-2x} \\ &\iff y-x+2=-\sqrt{x^2-2x} \\ &\iff (y-x+2)^2=(-\sqrt{x^2-2x})^2 \\ &\iff (y-x)^2+4(y-x)+4=x^2-2x \\ &\iff y^2-2xy+x^2+4y-4x+4=x^2-2x \\ &\iff y^2-2xy+4y-2x+4=0 \\ &\iff x(-2y-2)=-y^2-4y-4 \\ &\iff x=\frac{-y^2-4y-4}{-2y-2} \\ &\iff x=\frac{y^2+4y+4}{2y+2}=\frac{(y+2)^2}{2y+2}\end{aligned}$$

Comme $\frac{(y+2)^2}{2y+2}\geq 2$. *Alors*

$$\forall x\in]-1,0],\quad g^{-1}(x)=\frac{(x+2)^2}{2x+2}$$

d) *La courbe* $(C_{g^{-1}})$ *est la symétrie de la courbe* (C_f) *par rapport à la droite d'équation* $y=x$. *Voir la figure de la question* 3.

FIN

Pr : Yahya MATIOUI

etude – generale.com